

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

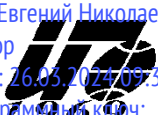
ФИО: Трофимов Евгений Николаевич

Должность: Ректор

Дата подписания: 26.03.2024 09:34:28

Уникальный программный ключ:

c379adf0ad4f91cbbf100b7fc3323cc41cc52545



Образовательное частное учреждение высшего образования  
**«Российская международная академия туризма»**

---

Факультет менеджмента туризма  
Кафедра математики и информатики

Принято Ученым Советом

29 июня 2023 г.

Протокол № 02-06-03

УТВЕРЖДАЮ

Первый проректор

В.Ю. Питюков

28 июня 2023 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ  
«Математика»**

по направлению 38.05.02 Таможенное дело  
квалификация (степень) выпускника – специалитет  
**Б1.О.06**

Рассмотрено и одобрено  
на заседании кафедры  
7 июня 2023 г., протокол №10

Разработчик:

Ковалева И.Н., д.э.н.,

доцент кафедры математики и информатики

Химки 2023

## 1. Цели и задачи дисциплины

*Цель дисциплины* – формирование у обучающихся компетенций УК-9 и ОПК-1 средствами дисциплины «Математика».

*Задачи дисциплины:*

1) способствовать формированию у обучающихся навыков логического умозаключения и научное мировоззрение, навыков решать математические задачи и задачи количественного анализа различных процессов с помощью математических инструментов и положений, предусматривающих заполнение таможенной документации в части контроля таможенной стоимости товаров, навыков принятия обоснованных экономических решений в различных областях жизнедеятельности;

2) развитие у обучающихся применения знаний, умений и навыков в сфере математики, экономики и управления, анализа потенциала и тенденций развития российской и мировой экономик для решения практических и (или) исследовательских задач в профессиональной деятельности.

## 2. Перечень формируемых компетенций и индикаторов их достижения, соотнесенные с результатами обучения по дисциплине

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций, представленных в компетентностной карте дисциплины в соответствии с ФГОС ВО, компетентностной моделью выпускника, определенной вузом и представленной в ОПОП, и содержанием дисциплины (модуля):

Категория компетенций	Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Результаты обучения
Экономическая культура, в том числе финансовая грамотность	<b>УК-9</b> Способен принимать обоснованные экономические решения в различных областях жизнедеятельности	<b>УК-9.1</b> Понимает базовые принципы функционирования экономики и экономического развития, цели формы участия государства в экономике <b>УК-9.2</b> Применяет методы личного экономического и финансового планирования для достижения текущих и долгосрочных финансовых целей, использует финансовые инструменты для управления личными финансами (личным бюджетом)	<b>Знает:</b> -математические основы экономики, принципы экономической теории, экономики организации, страхования и налогообложения <b>Умеет:</b> -принимать обоснованные экономические решения на базе теоретических основ математики, экономики, страхового права в таможенном деле, налогообложения <b>Владеет:</b> - навыками принятия обоснованных экономических решений в области таможенного дела

		<b>УК-9.3</b> Контролирует собственные экономические и финансовые риски	
	<b>ОПК-1</b> Способен применять знания в сфере экономики и управления, анализировать потенциал и тенденции развития российской и мировой экономик для решения практических и (или) исследовательских задач в профессиональной деятельности	<b>ОПК-1.1</b> Применяет знания в сфере экономики и управления с целью анализа потенциала и тенденций развития российской и мировой экономик для решения практических и исследовательских задач в таможенном деле <b>ОПК-1.2</b> Анализирует потенциал и тенденции развития российской и мировой экономик для решения практических и исследовательских задач в таможенном деле <b>ОПК-1.3</b> Решает профессиональные и исследовательские задачи в сфере таможенного дела на основе знаний экономики, управления, потенциала и тенденций развития российской и мировой экономик	<b>Знает:</b> - математические основы экономики, принципы экономической теории, экономики организации, страхования и налогообложения; - экономические процессы, происходящие в обществе; - сущность внешнеэкономической деятельности и виды внешнеэкономических сделок; - принципы ценообразования во внешней торговле; - место объектов таможенной инфраструктуры в экономике страны. <b>Умеет:</b> - анализировать структуру государственных и корпоративных финансов; - выявлять и анализировать основные тенденции развития экономик РФ и стран мира; - анализировать потенциал внешнеторговой деятельности РФ; - проводить и документировать оценку объектов бухгалтерского учета; - проводить инвентаризацию; - применять методы налогообложения и ценообразования в различных условиях внешней торговли; - проводить оценку объектов таможенной инфраструктуры. <b>Владет:</b> - навыками формирования финансовых результатов хозяйствующих субъектов; - навыками оценки степени влияния отдельных факторов на развитие внешнеэкономической деятельности в РФ; - методикой прогнозирования показателей деятельности объектов таможенной инфраструктуры; - методикой оптимизации

			размещения пунктов.
--	--	--	---------------------

### 3. Место дисциплины в структуре ОПОП и этапы формирования компетенций

Дисциплина «Математика» относится к дисциплинам обязательной части ОПОП. Компетенции, формируемые дисциплиной «Математик», также формируются и на других этапах в соответствии с учебным планом.

### 4. Объем дисциплины и виды учебной работы

#### 4.1. Очная форма обучения

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры	
		1	2
<b>Контактная работа обучающихся с преподавателем, в том числе:</b>	74	36	38
занятия лекционного типа (ЗЛТ)	34	16	18
лабораторные работы (ЗСТ (ЛР))	-	-	-
практические занятия (ЗСТ ПР)	32	16	16
в том числе на практическую подготовку обучающихся	-	-	-
групповые консультации, и (или) индивидуальную работу обучающихся с педагогическими работниками организации и (или) лицами, привлекаемыми организацией к реализации образовательных программ на иных условиях (в том числе индивидуальные консультации) (ГК)	4	2	2
групповые консультации по подготовке курсового проекта (работы)	-	-	-
контактная работа при проведении промежуточной аттестации (в том числе при оценивании результатов курсового проектирования (выполнения курсовых работ) (ПА конт)	4	2	2
<b>Самостоятельная работа обучающегося (СРО), в том числе</b>	106	36	70
СРуз - самостоятельная работа обучающегося при подготовке к учебным занятиям	70	34	36
СРпа - самостоятельная работа обучающегося при подготовке к промежуточной аттестации	36	2	34
<b>Форма промежуточной аттестации (экзамен, зачет с оценкой, зачет)</b>		Зач с оц.	экзамен
<b>Общая трудоемкость дисциплины:</b> часы	180	72	108
зачетные единицы	5	2	3

#### 4.2. Заочная форма обучения

Вид учебной работы	Всего часов	Курсы		
		1		
		УС	ЗС	ЛС
<b>Контактная работа обучающихся с преподавателем, в том числе:</b>	20	6	10	4
занятия лекционного типа (ЗЛТ)	8	4	4	-

Вид учебной работы	Всего часов	Курсы 1		
		УС	ЗС	ЛС
лабораторные работы (ЗСТ (ЛР))	-		-	-
практические занятия (ЗСТ ПР)	4	2	2	-
в том числе на практическую подготовку обучающихся	-		-	-
групповые консультации, и (или) индивидуальную работу обучающихся с педагогическими работниками организации и (или) лицами, привлекаемыми организацией к реализации образовательных программ на иных условиях (в том числе индивидуальные консультации) (ГК)	4		2	2
групповые консультации по подготовке курсового проекта (работы)	-			-
контактная работа при проведении промежуточной аттестации (в том числе при оценивании результатов курсового проектирования (выполнения курсовых работ) (ПА конт)	4		2	2
<b>Самостоятельная работа обучающегося (СРО), в том числе</b>	160	30	62	68
СРуз - самостоятельная работа обучающегося при подготовке к учебным занятиям	147	30	58	59
СРпа - самостоятельная работа обучающегося при подготовке к промежуточной аттестации	13		4	9
<b>Форма промежуточной аттестации (экзамен, зачет с оценкой, зачет)</b>		-	Зачет с оц.	экзамен
<b>Общая трудоемкость дисциплины: часы</b>	180	36	72	72
<b>зачетные единицы</b>	5	1	2	2

## 5. Содержание дисциплины

### 5.1. Содержание разделов и тем дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
I	Линейная алгебра и элементы аналитической геометрии	
I	Аналитическая геометрия, векторы и координатный анализ	<p>Система координат. Вектор на плоскости и в пространстве. Операции с векторами на плоскости и в пространстве (коллинеарность и ортогональность). Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, применение их и геометрический смысл.</p> <p>Прямая на плоскости (общее уравнение, уравнение с угловым коэффициентом, уравнение в отрезках, нормальное уравнение). Параллельность и перпендикулярность прямых.</p> <p>Кривые второго порядка (окружность, эллипс, гипербола, парабола).</p> <p>Прямая в пространстве (направляющий вектор прямой, уравнения прямой в пространстве: канонические, параметрические, общее. Условия параллельности и перпендикулярности прямых в</p>

		<p>пространстве.</p> <p>Плоскость в пространстве. Нормальный вектор плоскости. Уравнения плоскости (общее, в отрезках, нормальное). Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей. Пересечение прямой и плоскости.</p> <p>Поверхности второго порядка</p> <p>Возможности применения полученных сведений с экономическим обоснованием решения в различных областях жизнедеятельности.</p>
2	Элементы линейной алгебры	<p>Матрицы и определители (вид и операции над матрицами, свойства линейных операций над матрицами; способы вычисления определителя-детерминанта).</p> <p>Решение систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капели. Связь матриц с системами линейных алгебраических уравнений. Способы решения систем линейных алгебраических уравнений (метод Крамера, исследование и решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса). Фундаментальная система решений однородной системы уравнений.</p> <p>Возможности применять знания в сфере экономики и управления, анализировать потенциал и тенденции развития российской и мировой экономик для решения практических и (или) исследовательских задач в профессиональной деятельности.</p>
II	Математический анализ	
3	Введение в анализ: предел и непрерывность	<p>Множества: определения, термины и символы, операции, мощность. Основные числовые множества, классификация. Теоретико-множественный подход.</p> <p>Функция (элементарные функции, их свойства и графики), способы задания. Функции основных экономических процессов и их графики. Функция комплексного переменного.</p> <p>Предел и непрерывность функции. Числовая последовательность и ее предел. Число <math>e</math>. Предел функции (односторонние пределы). Основные теоремы о пределе функции. Замечательные пределы функции.</p> <p>Непрерывность функции в точке и на промежутке (основные свойства непрерывных функций). Классификация точек разрыва. Функции многих переменных.</p> <p>Возможности применения полученных сведений с экономическим обоснованием решения в различных областях жизнедеятельности.</p>
4	Дифференциальное исчисление	<p>Производная и дифференциал (физический и геометрический смысл). Приближенные вычисления с помощью дифференциала. Производная суммы, произведения, частного. Табличное дифференцирование. Производная сложной и обратной функции. Дифференцирование функций, заданных неявно. Уравнение касательной к графику функции в точке. Производные и дифференциалы высших порядков. Приложения дифференциального исчисления.</p> <p>Вычисление пределов по правилу Лопиталя. Основные теоремы дифференциального исчисления. Условия возрастания и убывания функции. Экстремумы функции. Наибольшее и наименьшее</p>

		<p>значения функции на отрезке. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты. Общая схема исследования и построения графика функции. Экономический смысл производной и дифференциала.</p> <p>Возможности применять знания в сфере экономики и управления, анализировать потенциал и тенденции развития российской и мировой экономик для решения практических и (или) исследовательских задач в профессиональной деятельности.</p>
5	Интегральное исчисление	<p>Первообразная и неопределенный интеграл. Табличное интегрирование. Основные методы интегрирования: замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Интегрирование некоторых классов функций (рациональные, иррациональные, содержащие тригонометрические выражения). Интегрирование функции комплексного переменного.</p> <p>Определенный интеграл и его приложения (геометрический и физический смысл интеграла). Формула Ньютона – Лейбница. Методы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле. Приближенное вычисление определенного интеграла (метод трапеций и парабол). Вычисление площадей плоских фигур, длины дуги, объем и площадь поверхности тел вращения. Экономические приложения определенного интеграла.</p> <p>Несобственные интегралы 1 и 2 рода.</p> <p>Возможности применять знания в сфере экономики и управления, анализировать потенциал и тенденции развития российской и мировой экономик для решения практических и (или) исследовательских задач в профессиональной деятельности.</p>
<b>III Применение основ математического анализа</b>		
6	Обыкновенные дифференциальные уравнения	<p>Дифференциальные уравнения (ДУ): проверка решения, единственность решения задачи Коши, ДУ с разделяющимися переменными, однородные ДУ первого порядка, линейные ДУ первого порядка (метод вариации произвольной постоянной, метод подстановки.). Уравнения Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах. Дифференциальные уравнения высших порядков.</p> <p>ДУ, допускающие понижение порядка (различные случаи). Линейные однородные ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Линейные неоднородные ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.</p> <p>Возможности применения полученных сведений с экономическим обоснованием решения в различных областях жизнедеятельности.</p>
7	Ряды	<p>Числовые ряды. Основные сведения о рядах. Признаки сходимости ряда с положительными членами (признаки сравнения, Коши, Даламбера, интегральный). Сходимость рядов с членами произвольного знака. Признак Лейбница.</p> <p>Степенные ряды. Область сходимости степенного ряда. Ряды Тейлора и Маклорена. Применение рядов в приближенных</p>

		вычислениях. Приложения степенных рядов. Возможности применения полученных сведений с экономическим обоснованием решения в различных областях жизнедеятельности.
IV	Теория вероятностей и математическая статистика	
8	Теория вероятностей	<p>Случайные события и комбинаторика. Основные понятия и определения. Классическое, статистическое и геометрическое определение вероятности события. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса (теорема гипотез). Повторение независимые испытания. Теорема Бернулли и ее следствия. Теорема Пуассона. Интегральная и дифференциальная теоремы Лапласа. Формула Муавра-Лапласа. Функция Лапласа.</p> <p>Случайные величины. Основные понятия и определения. Законы распределения вероятностей дискретных случайных величин (биномиальный, геометрический, Пуассона). Числовые характеристики случайных величин. Функция и плотность распределения случайной величины. Законы распределения вероятностей непрерывных случайных величин (равномерный, показательный). Нормальный закон распределения вероятностей случайных величин. Системы случайных величин, законы их распределения, числовые характеристики. Предельные теоремы теории вероятностей.</p> <p>Возможности применять знания в сфере экономики и управления, анализировать потенциал и тенденции развития российской и мировой экономик для решения практических и (или) исследовательских задач в профессиональной деятельности.</p>
9	Математическая статистика	<p>Основы теории математической статистики. Предмет и задачи математической статистики. Генеральная и выборочная совокупность. Вариационный ряд. Статистическое распределение выборки. Полигон и гистограмма. Статистические оценки параметров распределения. Математическая статистика. Основы теории. Статистическая проверка гипотез. Критерий согласия Пирсона. Элементы теории корреляции. Линейная регрессия.</p> <p>Возможности применять знания в сфере экономики и управления, анализировать потенциал и тенденции развития российской и мировой экономик для решения практических и (или) исследовательских задач в профессиональной деятельности.</p>

## 5.2. Разделы дисциплин и виды занятий

### 5.2.1. Очная форма обучения

1 семестр

№	Наименование разделов и тем дисциплины	Формируе мая	Всего часов	Контактная работа с обучающимися (час.)		СРО
					в том числе	



		компетенция		Итого	ЗЛТ	ЗСТ (ЛР)	ЗСТ (ПР)	ГК/ПА	
1	Аналитическая геометрия, векторы и координатный анализ	УК-9	22	12	6	-	6	-	10
2	Элементы линейной алгебры	ОПК-1	22	10	6	-	4	-	12
3	Введение в анализ: предел и непрерывность	УК-9	22	10	4	-	6	-	12
	Групповые консультации, и (или) индивидуальную работу обучающихся с педагогическими работниками организации и (или) лицами, привлекаемыми организацией к реализации образовательных программ на иных условиях (в том числе индивидуальные консультации) (ГК)	УК-9 ОПК-1	2	2	-	-	-	2	
	<b>Форма промежуточной аттестации (зачет с оценкой)</b>	УК-9 ОПК-1	4	2	-	-	-	2	2
	Всего часов		72	36	16	-	16	4	36

## 2 семестр

№	Наименование разделов и тем дисциплины	Формируемая компетенция	Всего часов	Контактная работа с обучающимися (час.)					СРО
				Итого	в том числе				
					ЗЛТ	ЗСТ (ЛР)	ЗСТ (ПР)	ГК/ПА	
4	Дифференциальное исчисление	ОПК-1	10	4	2	-	2	-	6
5	Интегральное исчисление	ОПК-1	14	8	4	-	4	-	6
6	Обыкновенные дифференциальные уравнения	УК-9	10	4	2	-	2	-	6
7	Ряды	УК-9	10	4	2	-	2	-	6
8	Теория вероятностей	ОПК-1	12	6	4	-	2	-	6
9	Математическая статистика	ОПК-1	14	8	4	-	4	-	6
	Групповые консультации, и (или) индивидуальную работу обучающихся с педагогическими работниками организации и (или) лицами, привлекаемыми организацией к реализации образовательных программ на иных условиях (в том числе индивидуальные консультации) (ГК)	УК-9 ОПК-1	2	2	-	-	-	2	
	<b>Форма промежуточной аттестации</b>	УК-9	36	2	-	-	-	2	34

(экзамен)	ОПК-1							
Всего часов		108	38	18	-	16	4	70

### 5.2.2. Заочная форма обучения

№	Наименование разделов и тем дисциплины	Формируемая компетенция	Всего часов	Контактная работа с обучающимися (час.)					СРО
				Итого	в том числе				
					ЗЛТ	ЗСТ (ЛР)	ЗСТ (ПР)	ГК/ПА	
1	Аналитическая геометрия, векторы и координатный анализ	УК-9	18	1	1	-	-	-	17
2	Элементы линейной алгебры	ОПК-1	18	2	1	-	1	-	16
3	Введение в анализ: предел и непрерывность	УК-9	18	2	1	-	1	-	16
4	Дифференциальное исчисление	ОПК-1	18,5	1,5	1	-	0,5	-	17
5	Интегральное исчисление	ОПК-1	18,5	1,5	1	-	0,5	-	17
6	Обыкновенные дифференциальные уравнения	УК-9	16,5	0,5	0,5	-	-	-	16
7	Ряды	УК-9	16,5	0,5	0,5	-	-	-	16
8	Теория вероятностей	ОПК-1	17,5	1,5	1	-	0,5	-	16
9	Математическая статистика	ОПК-1	17,5	1,5	1	-	0,5	-	16
	Групповые консультации, и (или) индивидуальную работу обучающихся с педагогическими работниками организации и (или) лицами, привлекаемыми организацией к реализации образовательных программ на иных условиях (в том числе индивидуальные консультации) (ГК)	УК-9 ОПК-1	4	4	-	-	-	4	-
	<b>Форма промежуточной аттестации (зачет с оценкой, экзамен)</b>	УК-9 ОПК-1	17	4	-	-	-	4	13
	Всего часов		180	20	8	-	4	8	160

### 6. Контактная и самостоятельная работа обучающихся

Контактная работа при проведении учебных занятий по дисциплинам (модулям) включает в себя: занятия лекционного типа (лекции и иные учебные занятия, предусматривающие преимущественную передачу учебной информации педагогическими работниками РМАТ и (или) лицами, привлекаемыми РМАТ к реализации образовательных программ на иных условиях, обучающимся) и (или) занятия семинарского типа (семинары, практические занятия, практикумы, лабораторные работы, коллоквиумы и иные аналогичные занятия), и (или) групповые консультации, и (или) индивидуальную работу обучающихся с педагогическими работниками РМАТ и (или) лицами, привлекаемыми РМАТ к реализации

образовательных программ на иных условиях (в том числе индивидуальные консультации).

Занятия лекционного типа проводятся в соответствии с объемом и содержанием, представленным в таблице раздела 5.

При проведении учебных занятий по дисциплине обеспечивается развитие у обучающихся навыков командной работы, межличностной коммуникации, принятия решений, лидерских качеств (включая при необходимости проведение интерактивных лекций, групповых дискуссий, ролевых игр, тренингов, анализ ситуаций и имитационных моделей, содержание дисциплины (модуля) составлено на основе результатов научных исследований, проводимых РМАТ, в том числе с учетом региональных особенностей профессиональной деятельности выпускников и потребностей работодателей).

### **6.1. Занятия семинарского типа (семинары, практические занятия, практикумы, лабораторные работы, коллоквиумы и др.)**

#### **Тема 1. Аналитическая геометрия, векторы и координатный анализ**

*Цель занятия:* Изучение основ аналитической геометрии, векторного анализа и координатного метода и обзор применения этих знаний для экономических решений в различных областях жизнедеятельности.

*Компетенции:* УК-9 Способен принимать обоснованные экономические решения в различных областях жизнедеятельности.

*Тип занятия:* практическое занятие

*Форма проведения:* устный ответ (в форме дискуссии), решение математических задач, представление доклада в форме презентации на определенную тему.

*Основная тема (либо проблема) для обсуждения:* Использование основ аналитической геометрии, векторного анализа и координатного метода, в целях формирования навыков применения обоснованных экономических решений в различных областях жизнедеятельности.

*Вопросы для обсуждения:*

1. Система координат на плоскости и в пространстве.
2. Вектор на плоскости и в пространстве.
3. Разложение вектора по векторам базиса.
4. Операции с векторами на плоскости и в пространстве.
5. Условия коллинеарности и ортогональности векторов.
6. Скалярное произведение векторов, его геометрический и экономический смысл.
7. Векторное произведение векторов, его геометрический и экономический смысл.
8. Смешанное произведения векторов, его геометрический и экономический смысл.
9. Уравнение прямой на плоскости (векторный вывод).
10. Общее уравнение прямой, уравнение прямой с угловым коэффициентом, уравнение прямой в отрезках, нормальное уравнение.
11. Параллельность и перпендикулярность прямых. Точка пересечения прямых на плоскости.
12. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.
13. Кривые второго порядка (окружность, эллипс, гипербола, парабола).
14. Направляющий вектор прямой в пространстве.
15. Уравнения прямой в пространстве (канонические, параметрические, общее).
16. Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве.
17. Нормальный вектор плоскости.
18. Уравнения плоскости (общее, в отрезках, нормальное).

19. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.  
 20. Пересечение прямой и плоскости. Поверхности второго порядка.

*Математические задачи*

1. Найти центр и радиус окружности, заданной уравнением  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ .
2. Даны две вершины треугольника ABC:  $A(-4, -1, 2)$  и  $B(3, 5, -16)$ . Найти третью вершину C, зная, что середина стороны AC лежит на оси Oу, а середина стороны BC – на плоскости Oхz.
3. Найти точку M пересечения медиан треугольника ABC.
4. В параллелограмме ABCD точка K – середина отрезка BC, а точка O – точка пересечения диагоналей. Принимая за базисные векторы AB и AD, найти в этом базисе координаты векторов BD, CO, KD.
5. Даны середины сторон треугольника  $(2, 4)$ ,  $(-3, 0)$ ,  $(2, 1)$ . Найти его вершины.
6. Разложить вектор  $d = \{-6; 0; 13\}$  по базису из векторов  $a = \{2; -1; 3\}$ ,  $b = \{1; 1; -1\}$ ,  $c = \{-3; 1; 2\}$ .
7. Даны координаты векторов a, b, c, x в правом ортонормированном базисе i, j, k. Показать, что векторы a, b, c тоже образуют базис и найти координаты вектора x в базисе a, b, c. 1)  $x = -(2; 4; 7)$ ,  $a = (3; 1; 2)$ ,  $b = (1; 3; 1)$ ,  $c = (-1; 2; 4)$ .
8. Дан равносторонний треугольник A, B, C длины сторон которого равны 1. Вычислить  $(AB, BC) + (BC, CA) + (CA, AB)$ .
9. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE, CF. Вычислить  $(AD, BC) + (BE, CA) + (CF, AB)$ .
10. Даны точки  $A(2, 1, -1)$ ,  $B(3, 0, 2)$ ,  $C(5, 1, 1)$ ,  $D(0, -1, 3)$ , являющиеся вершинами тетраэдра. Найти объем тетраэдра и длину высоты, опущенной из вершины C.
11. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются точки  $A(-1, 0, -1)$ ,  $B(0, 2, -3)$ ,  $C(4, 4, 1)$ .
12. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $A(-3, 4)$  и параллельной прямой 1)  $x - 2y + 5 = 0$ ; 2)  $x = 2$ ; 3)  $y = -1$ .
13. Составить уравнение прямой, проходящей через две данные точки: 1)  $A(-3, 1)$  и  $B(1, 2)$ ; 2)  $A(2, 1)$  и  $B(2, -5)$ ; 3)  $A(0, 2)$  и  $B(-1, 0)$ ; 4)  $A(1, -3)$  и  $B(3, -3)$ .
14. Установить взаимное расположение прямых данной пары; если прямые пересекаются, найти координаты точки пересечения: 1)  $x - 3y - 2 = 0$  и  $2x + y - 1 = 0$ ; 2)  $x + 3y - 1 = 0$  и  $2 - 2x - 6y = 0$ ; 3)  $-x - y - 3 = 0$  и  $3x + 3y + 1 = 0$ .
15. При каких a прямые  $ax - 4y = 6$  и  $x - ay = 3$ : 1) пересекаются; 2) параллельны; 3) совпадают.
16. Составить уравнения прямых, параллельных прямой  $5x + 12y - 1 = 0$  и отстоящих от нее на расстояние 5.
17. Через точки  $M_1(-6, 6, -5)$  и  $M_2(12, -6, 1)$  проведена прямая. Найти точки ее пересечения с координатными плоскостями.
18. Даны координаты вершин A и B треугольника ABC и точки M пересечения его высот. Найти координаты вершины C. Сделать чертеж.  $A(-10; 2)$ ,  $B(6; 4)$ ,  $M(5; 2)$ .
19. Даны вершины тетраэдра  $A(0; 0; 2)$ ,  $B(3; 0; 5)$ ,  $C(1; 1; 0)$ ,  $D(4; 1; 2)$ . Найти длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

Представление доклада в форме презентации на тему:

1. Возможность применения знаний в сфере экономики и управления, анализировать потенциал и тенденции развития российской и мировой экономик для решения практических и (или) исследовательских задач в профессиональной деятельности на

- основе знаний аналитической геометрии, векторов и координатного анализа.
2. Применение основ аналитической геометрии, векторов и координатного анализа в экономике и управлении.
  3. Возможность использования основ аналитической геометрии, векторов и координатного анализа в экономических исследованиях и экономических расчетах.
  4. Возможность принимать обоснованные экономические решения в различных областях жизнедеятельности на основе знаний аналитической геометрии, векторов и координатного анализа.

## **Тема 2. Элементы линейной алгебры**

*Цель занятия:* Изучение основ линейной алгебры с целью применения знаний в сфере экономики и управления, анализа потенциала и тенденций развития российской и мировой экономик для решения практических и (или) исследовательских задач в профессиональной деятельности.

*Компетенции:* ОПК-1 Способен применять знания в сфере экономики и управления, анализировать потенциал и тенденции развития российской и мировой экономик для решения практических и (или) исследовательских задач в профессиональной деятельности

*Тип занятия:* практическое занятие

*Форма проведения:* устный ответ (в форме дискуссии), решение математических задач, представление доклада в форме презентации на определенную тему, решение кейс-задач

*Основная тема (либо проблема) для обсуждения:* Роль основ линейной алгебры в сфере экономики и управления, возможность применения анализа потенциала и тенденций развития российской и мировой экономик для решения практических и (или) исследовательских задач в профессиональной деятельности.

*Вопросы для обсуждения:*

1. Матрицы и определители.
2. Определение матрицы. Виды матриц.
3. Операции над матрицами. Свойства линейных операций над матрицами.
4. Определитель (детерминант) матрицы.
5. Свойства детерминанта.
6. Способы вычисления детерминанта.
7. Вычисление детерминанта раскрытием по строке (столбцу).
8. Единичная и диагональная матрицы.
9. Решение систем линейных уравнений.
10. Обратная матрица.
11. Вычисление элементов обратной матрицы.
12. Вырожденная матрица.
13. Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капели.
14. Связь матриц с системами линейных алгебраических уравнений.
15. Решение системы линейных алгебраических уравнений обращением матрицы.
16. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера.
17. Исследование и решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.
18. Фундаментальная система решений однородной системы уравнений.
19. Задачи линейной алгебры с экономическим и управленческим содержанием.
20. Возможности применять знания в сфере экономики и управления, анализировать потенциал и тенденции развития российской и мировой экономик для решения практических и (или) исследовательских задач профессиональной деятельности в таможенном деле.

*Математические задачи*

1. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - 5x_3 = -9. \end{cases}$$

Требуется: 1) найти ее решение с помощью формул Крамера; 2) записать систему в матричной форме и решить ее средствами матричного исчисления. Проверить правильность вычисления обратной матрицы используя матричное умножение.

2. Вычислить определители: а) разложением по строке или столбцу; б) приведением к

треугольному виду  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$  и  $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ .

3. Найти обратную матрицу  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ .

4. Решить матричное уравнение  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

5. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей в некотором базисе. Найти матрицу оператора в базисе из собственных

векторов  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ .

Представление доклада в форме презентации на тему:

1. Возможность применения знаний в сфере экономики и управления, анализировать потенциал и тенденции развития российской и мировой экономик для решения практических и (или) исследовательских задач в профессиональной деятельности на основе матричного анализа и при использовании основ линейной алгебры.
2. Применение основ матричного анализа и линейной алгебры в экономике и управлении и в профессиональной деятельности, при решении практических и исследовательских задач в таможенном деле
3. Возможность использования основ матричного анализа и линейной алгебры в экономических исследованиях и экономических расчетах, при решении практических и исследовательских задач в таможенном деле.

*Кейс-задачи*

1. Предприятие выпускает три вида продукции, используя два вида сырья. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей  $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Определить затраты сырья,

необходимые для осуществления следующего выпуска товаров:  $c = \begin{pmatrix} 140 \\ 110 \\ 90 \end{pmatrix}$ .

2. Предприятие выпускает три вида продукции, используя два вида сырья. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей  $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Определить стоимость всего затраченного сырья, если затраты сырья, необходимые для осуществления заданного выпуска товаров, заданы матрицей  $c = \begin{pmatrix} 140 \\ 110 \\ 90 \end{pmatrix}$ , а стоимость каждого вида сырья в

расчете на единицу имеет вид  $p = (25 \ 35)$ .

3. В некоторой отрасли  $m=4$  заводов выпускают  $n=3$  видов продукции. Матрица  $A_{m \times n}$  задает объемы продукции на каждом заводе в первом квартале, матрица  $B_{m \times n}$  - соответственно во втором;  $(a_{ij}, b_{ij})$  - объемы продукции  $j$ -го ( $j = \overline{1, n}$ ) типа на  $i$ -м ( $i = \overline{1, m}$ ) заводе в первом и втором кварталах соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти:

- объемы продукции;
  - прирост объемов продукции во втором квартале по сравнению с первым по видам продукции и заводам;
  - стоимостное выражение выпущенной продукции за полгода (денежных единиц), если  $\lambda$  - курс денежных единиц по отношению к рублю.
4. Предприятие производится  $n$  типов продукции, объемы выпуска заданы матрицей  $A_{1 \times n}$ . Цена реализации единицы  $i$ -го типа продукции в  $j$ -м регионе задана матрицей  $B_{n \times k}$ , где  $k$  - количество регионов, в которых реализуется продукция. Найти  $C$  -

матрицу выручки по регионам, если  $A = (100 \ 200 \ 100)$ ;  $B_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ .

5. Предприятие производит  $n$  типов продукции, используя  $m$  видов ресурсов. Нормы затрат ресурса  $i$ -го ( $i = \overline{1, m}$ ) товара на производство единицы продукции  $j$ -го ( $j = \overline{1, n}$ ) типа задана матрицей затрат  $A_{m \times n}$ . Пусть за определенный отрезок времени предприятие выпустило количество продукции каждого типа  $x_{ij}$ , записанное матрицей  $X_{n \times 1}$ . Определить  $S$  - матрицу полных затрат ресурсов каждого вида на производство

всей продукции за данный период времени, если  $A_{4 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $X_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 110 \\ 90 \\ 100 \end{pmatrix}$ .

6. Завод производит двигатели, которые могут либо сразу потребовать дополнительной регулировки (в 40% случаев), либо сразу могут быть использованы (в 60% случаев). Как показывают статистические исследования, те двигатели, которые изначально требовали регулировки, потребуют дополнительной регулировки через месяц в 65% случаев, а в 35% случаев через месяц будут работать хорошо. Те же двигатели, которые не требовали первоначальной регулировки, потребуют ее через один месяц в 20% случаев и продолжат хорошо работать в 80% случаев. Какова доля двигателей, которые будут работать хорошо или потребуют регулировки через два месяца после выпуска? Через три месяца?
7. Швейная фабрика специализируется по пошиву изделий трех видов. Это платья, брюки и майки. При этом используется сырье трех типов:  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ . Нормы расхода каждого из них на одно изделие и объем расхода сырья на один день приведены в таблице:

Виды сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие, усл.ед.			Расход сырья на один день, усл.ед.
	Платье	Брюки	Майки	
$S_1$	4	2	1	1600
$S_2$	5	3	4	2700
$S_3$	3	1	2	1300

Найти ежедневный объем выпуска каждого вида продукции.

8. Предприятие выпускает ежедневно четыре вида изделий, основные производственно-экономические показатели которых приведены в следующей таблице:

Вид изделий	Количество изделий	Расход сырья, кг/изд.	Норма времени изготовления, ч/изд.	Цена изделия, ден. ед./изд.
1	20	5	10	30
2	50	2	5	15
3	30	7	15	45
4	40	4	8	20

Требуется определить следующие ежедневные показатели: расход сырья  $S$ , затраты рабочего времени  $T$  и стоимость  $P$  выпускаемой продукции предприятия.

9. Предприятие выпускает четыре вида изделий с использованием четырех видов сырья. Нормы расхода сырья даны как элементы матрицы  $A$ :

$$A = \begin{matrix} \text{Вид сырья} & & & & & \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & & \end{matrix}$$

Вид изделия.

Требуется найти затраты сырья каждого вида при заданном плане выпуска каждого вида изделия: соответственно, 60, 50, 35 и 40 ед.

10. Структурная матрица торговли четырех стран имеет вид



$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Найти бюджеты этих стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что сумма бюджетов задана:  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6270$ .

### Тема 3. Введение в анализ: предел и непрерывность

*Цель занятия:* Изучение основ теории множеств, математического анализа и анализ возможности применения обоснованных экономических решений в различных областях жизнедеятельности.

*Компетенции:* УК-9 Способен принимать обоснованные экономические решения в различных областях жизнедеятельности

*Тип занятия:* практическое занятие

*Форма проведения:* устный ответ (в форме дискуссии), решение математических задач, представление доклада в форме презентации на определенную тему.

*Основная тема (либо проблема) для обсуждения:* Возможность применения основ теории множеств и математического анализа для обоснованных экономических решений в различных областях жизнедеятельности

*Вопросы для обсуждения:*

1. Множества: определения, термины и символы, операции, мощность.
2. Основные числовые множества.
3. Теоретико-множественный подход.
4. Функция. Способы задания функции.
5. Основные элементарные функции, их свойства и графики.
6. Функции основных экономических процессов и их графики.
7. Функция комплексного переменного.
8. Предел и непрерывность функции.
9. Числовая последовательность.
10. Предел числовой последовательности.
11. Число  $e$ .
12. Предел функции в точке и на бесконечности.
13. Односторонние пределы функции.
14. Основные теоремы о пределе функции.
15. Замечательные пределы функции.
16. Непрерывность функции в точке.
17. Непрерывность функции на промежутке.
18. Основные свойства функций непрерывных на отрезке.
19. Классификация точек разрыва.
20. Функции многих переменных.
21. Задачи теории множеств и непрерывности с экономическим и управленческим содержанием.

*Математические задачи*

1. При условии, что  $x \rightarrow 5$ , вычислите предел функции  $f(x)$ , если:

а)  $f(x) = 2x - 3$ ;      б)  $f(x) = x^2 - 10x + 17$ .

2. Вычислите предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$ .

3. Вычислите: а)  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{6}{x^2 - 9} - \frac{1}{x - 3} \right)$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ ;      в)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - 3}{\sqrt{x} - 2}$ .

4. Найти: а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{(x - 1)^2}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{6 - x}}{x^2 - 4}$ ;      в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$ .

5. Вычислить пределы функций, не пользуясь средствами дифференциального исчисления.

1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x}{-5x^2 + x + 1}$ ;      2)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\ln(x + 4)}{\operatorname{ctg}(x + 2)}$ ;

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin^2 x)}{e^{x^2} - 1}$ ;      4)  $\lim_{x \rightarrow -1} (3 + 2x)^{\frac{5}{x+1}}$ .

6. Найти: а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 8x}$ ;      в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^6}{\sin^5 x}$ ;      г)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$ .

7. Найдите предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{5 + x^2 - x^3}$ .

8. Найдите предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - x)$ .

9. Найти: а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{4x}$ ;      б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ .

10. Найти: а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{5}{x} \right)^{3x}$ ;      б)  $\lim_{y \rightarrow 0} (1 - 3y)^{\frac{2}{y}}$ .

11. Является ли функция непрерывной в каждой точке данного

промежутка: 1)  $f(x) = x^5 - 3x^2 + 2$ ,  $(-\infty; +\infty)$ ; 2)  $g(x) = \frac{x^3 - x}{2x - 6}$ ,  $[5; +\infty)$ ;

3)  $g(x) = \frac{x^3 - x}{2x - 6}$ ,  $(0; +\infty)$ ?

12. Выясните, к какому числу стремится функция  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 5}$  при  $x \rightarrow 0$ .

13. Найдите: 1)  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 + 2x - 1)$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 9}{x - 5}$ ; 3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ .

14. Найти:  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{3x+5}{x-5}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x+5}{x-5}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x \cos \frac{1}{x} \right)$ .

15. Доказать непрерывность функции  $y = f(x)$  в точке  $x = 0$  или установить характер точки разрыва функции в этой точке:

а)  $y = \frac{\sin x}{x}$ ; б)  $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0; \end{cases}$  в)  $y = \frac{1}{1+2^{1/x}}$ ;  
г)  $y = 2^{1/x}$ .

16. Исследовать функцию  $y=f(x)$  на непрерывность: найти точки разрыва функции и определить их тип. Построить схематический график функции.

1.  $y = \frac{|x+5|}{x+5} - \frac{5}{x}$ . 2.  $y = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{5}{x}$ . 3.  $y = \frac{|x+4|}{x+4} - \frac{4}{x}$ . 4.  $y = \frac{|x-4|}{x-4} + \frac{4}{x}$ .

17. Исследовать функции на непрерывность. В случае устранимого разрыва доопределить функцию до непрерывной

$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ . 2.  $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$ .

18. Исследовать функцию на непрерывность. Построить схематично график функции.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0; \\ x^2 + 1, & 0 < x \leq 1; \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

Представление *доклада в форме презентации* на тему:

1. Возможность использования понятий непрерывности функции и пределов последовательности и функции в экономических исследованиях и экономических расчетах и в профессиональной деятельности.
2. Применение решения и примеров задач (введение в анализ: предел и непрерывность) в исследованиях и экономических расчетах и в профессиональной деятельности.
3. Возможность принимать обоснованные экономические решения в различных областях жизнедеятельности на основе непрерывности функции и пределов последовательности и функции при решении практических и исследовательских задач в таможенном деле.

#### Тема 4. Дифференциальное исчисление

*Цель занятия:* Изучение дифференциального исчисления в целях применения знаний в сфере экономики и управления для анализа потенциала и тенденций развития российской и мировой экономик для решения практических и (или) исследовательских задач в профессиональной деятельности.

*Компетенции:* ОПК-1 Способен применять знания в сфере экономики и управления, анализировать потенциал и тенденции развития российской и мировой экономик для решения практических и (или) исследовательских задач в профессиональной деятельности.

*Тип занятия:* практическое занятие

*Форма проведения:* устный ответ (в форме дискуссии), решение кейс-задач

*Основная тема (либо проблема) для обсуждения:* Возможности применения

дифференциального исчисления в сфере экономики и управления на основе анализа потенциала и тенденций развития российской и мировой экономик, применение дифференциального исчисления для решения практических и (или) исследовательских задач в профессиональной деятельности

*Вопросы для обсуждения:*

1. Производная и дифференциал.
2. Производная, ее физический и геометрический смысл.
3. Дифференциал, его геометрический смысл.
4. Приближенные вычисления с помощью дифференциала.
5. Производная суммы, произведения, частного.
6. Табличное дифференцирование.
7. Производная сложной и обратной функции.
8. Дифференцирование функций, заданных неявно.
9. Уравнение касательной к графику функции в точке.
10. Производные и дифференциалы высших порядков.
11. Приложения дифференциального исчисления.
12. Вычисление пределов по правилу Лопиталя.
13. Основные теоремы дифференциального исчисления.
14. Условия возрастания и убывания функции.
15. Экстремумы функции.
16. Точки перегиба.
17. Выпуклость и вогнутость графика функции.
18. Асимптоты.
19. Общая схема исследования и построения графика функции.
20. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
21. Экономический смысл производной и дифференциала.
22. Задачи дифференциального исчисления с экономическим и управленческим содержанием.
23. Возможности применять знания в сфере экономики и управления, анализировать потенциал и тенденции развития российской и мировой экономик для решения практических и (или) исследовательских задач профессиональной деятельности в таможенном деле.

*Кейс задачи*

1. Опытным путем установлены функции спроса  $q = \frac{p+8}{p+2}$  и предложения  $s = p+0.5$ , где  $Q$  и  $S$  — количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени,  $P$  — цена товара. Найти: равновесную цену, при которой спрос и предложение совпадают; эластичность спроса и предложения для этой цены; изменение дохода при увеличении цены на 5% от равновесной.
2. Зависимость между издержками производства  $u$  и объемом выпускаемой продукции  $x$  выражается функцией  $y = x e^{-x^2}$ . Требуется: определить средние и предельные издержки при объеме продукции  $x = 0.5$  условных единиц;

найти эластичность издержек при выпуске продукции,

равном  $x_1=1$  и  $x_2=3$  условных единиц.

3. Пусть в краткосрочном плане производственная функция зависит только от численности персонала и имеет вид  $y=f(n)=6n^2-0.2n^3$ , где  $y$  — выпуск продукции, а  $n$  — число работающих. Определить численность персонала, при которой выпуск  $y$  достигает максимального значения.
4. Поток пассажиров  $z$  выражается функцией  $z = \frac{x^2}{y}$ , где  $x$  - число жителей,  $y$  - расстояние между городами. Найти частичные производные и объяснить их смысл.
5. Для выпуска некоторого товара обозначена производственная функция  $f(x, y) = 20x + 10y - 2y^2 + 4x^2 + 3xy$ , где  $x$  и  $y$  - факторы производства. Обозначить: а) закон изменения производственной функции; б) эластичность функции по каждому фактору; в) коэффициент эластичности по факторам при  $x = 1, y = 1$ .
6. Пусть производственная функция  $z = 2x^2y + 3xy^2 + x^3$ , где  $x$  - затраты живого труда,  $y$  - затраты автоматизированной работы. Найти  $E_x(z)$  и  $E_y(z)$  в точке  $(1; 1)$ .
7. Имеет данные про цену нефти  $x$  (ден. ед) и индекс акций нефтяных компаний  $y$  (ден. ед):

$x$	17,28	17,05	18,30	18,80	19,20	18,50
$y$	537	524	550	555	560	552

Предполагая, что между переменными  $x$  и  $y$  существует линейная зависимость найти эмпирическую формулу вида  $y = kx + b$ , используя метод наименьших квадратов.

8. Фирма изготавливает два вида товаров  $G_1$  и  $G_2$  и продает их по цене 1000 рублей и 800 рублей соответственно. Объемы выпуска товаров  $Q_1$  и  $Q_2$ . Функция затрат имеет вид:  $C = 2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2$ . Найти такие значения  $Q_1$  и  $Q_2$ , по которым прибыль, полученная фирмой, максимальная. Найти эту прибыль.
9. Найти среднюю и предельную выручку фирмы при линейной убывающей кривой спроса. Какова эластичность спроса по цене в средней точке кривой спроса?
10. На начальном этапе производства фирма минимизирует средние издержки, причем функция издержек имеет вид  $C = C(q) = 200 + 10q + \frac{1}{2}q^2$ . В дальнейшем цена на единицу товара устанавливается равной 50 у. е. На сколько единиц товара фирме следует увеличить выпуск? На сколько при этом изменятся средние издержки?
11. Найти производную функции  $y = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$ .

$$y = \sqrt{x} + \frac{6}{\sqrt[5]{x}} - \frac{1}{x^9} + \frac{7}{9x^5}$$

$$z = x^5 \left( 2 - \frac{x}{3} + 3x^2 \right)$$

$$y = 8^{x^2-5x}$$

$$y = \ln(x^5 - 2x^2 + 5)$$

$$y = \arcsin 5x$$

$$y = \frac{2x^3}{\operatorname{tg} x}$$

$$y = \arccos^5(4x + 5)$$

$$f(x) = \frac{\arccos x}{x^2+1}$$

$$y = (1 + 5x)^3$$

$$y = \ln \cos 3x$$

$$y = x^3 3^x$$

$$y = \sqrt[3]{2 + x^4}$$

$$y = \sin x^2$$

$$y = \cos^2 x$$

$$y = 2^x - \operatorname{arctg} x$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} \cdot e^x}$$

$$f(x) = (5x - 3) \cdot 2^x$$

12. Найти тангенс угла наклона касательной к графику функции  $y = x^3 - x$  в точке  $x_0 = 0$ .

13. Точка движется по закону  $x(t) = 2t^3 - 3t$ . Чему равна скорость в момент времени  $t = 1$ .

14. Записать уравнение касательной к графику функции  $y = x^2 \ln x$  в точке  $x_0 = e$ .

15. Уравнение движения материальной точки вдоль оси имеет вид  $s(t) = -0,5t^3 + t + 2$  (м). Найти ускорение  $a(t)$  точки в момент времени  $t = 2$  с.

16. Найти угол, который образует с осью  $x$  касательная к графику

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 3x,$$

функции проведенная в точке  $x = 0$ .

а.

17. Покажите, что функция  $y=f(x)$ , заданная неявно выражением  $2+2x=\ln(2y+3)$ , удовлетворяет уравнению  $y''(2y+3)-2(y')^2=0$ .

18. Исследовать функцию  $y=x e^{-x^2}$  на монотонность.

19. Исследовать на монотонность функцию  $y = x^5 + x^3 + 1$ .

$$y = \frac{x^2}{2} - 3 \ln(x - 2).$$

20. Исследовать на монотонность функцию

$$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1.$$

21. Исследовать на экстремум функцию

$$y = \ln(x - 2) + \ln x.$$

22. Исследовать на экстремум функцию

23. Исследовать на экстремум функцию  $y = \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 1}$ .
24. Исследовать функцию  $y = x e^{-x^2}$  на выпуклость и точки перегиба.
25. Найти асимптоты графика функции  $y = x e^{-x^2}$ .
26. Провести полное исследование функции  $y = x e^{-x^2}$  и построить ее график.
27. Найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции  $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 225$  на отрезке  $[0; 6]$ .
28. Построить график функции  $y = x^3 - 4x$ .
29. Построить график функции  $y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$ .
30. Найти частные производные функций: а)  $z = \frac{x}{y}$ ; б)  $z = x^y$ .
31. Найти коэффициенты эластичности по  $x$  и  $y$  производственной функции Кобба-Дугласа  $z = a_0 \cdot x^{\alpha_1} \cdot y^{\alpha_2}$  в точке  $(x_0, y_0)$ .
32. Найти все частные производные второго порядка от функций: а)  $z = x^3 + y^2 + 5x^2 y$ ;  
б)  $z = \arctg \frac{x}{y}$ .
33. Найти частичные производные функций двух переменных  $z = x^3 y - 3x^2 + 2y - 1$ ,  $z = \ln(x^2 - y^2)$ ,  $z = x^y$ ,  $z = x^2 - x e^y$ ,  
 $z = \frac{x}{y}$ ,  $z = \sqrt{x} 2^y$ .
34.  $z = x^2 - xy + 2y$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial l}$  в точке  $M(1; 3)$  в направлении  $\vec{l} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ .
35. Пусть  $z = 4 - x^2 - y^2$  и  $M(1; 2)$ . Найти  $\text{grad } z$  в точке  $M$  и нарисовать этот вектор.
36.  $z = \frac{4}{x^2 + y^2}$ , точка  $M(-1; 2)$ . Найти изокванту, которая проходит через данную точку  $M$  и  $\text{grad } z \Big|_{\substack{x=-1 \\ y=2}}$ .
37. Исследовать на экстремум функцию  $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$ .
38. Исследовать на экстремум функцию двух переменных  $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ .
39. Исследовать на экстремум функцию двух переменных  $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ .

## Тема 5. Интегральное исчисление

*Цель занятия:* Изучение интегрального исчисления с целью применения в сфере экономики и управления, анализа потенциала и тенденций развития российской и мировой экономик для решения практических и (или) исследовательских задач в профессиональной деятельности.

*Компетенции:* ОПК-1 Способен применять знания в сфере экономики и управления, анализировать потенциал и тенденции развития российской и мировой экономик для решения практических и (или) исследовательских задач в профессиональной деятельности.

*Тип занятия:* практическое занятие

*Форма проведения:* устный ответ (в форме дискуссии), решение математических задач

*Основная тема (либо проблема) для обсуждения:* Возможность применения основ интегрального исчисления в сфере экономики и управления, анализа потенциала и тенденций развития российской и мировой экономик для решения практических и (или) исследовательских задач в профессиональной деятельности.

*Вопросы для обсуждения:*

1. Первообразная.
2. Неопределенный интеграл.
3. Интегралы от элементарных функций.
4. Табличное интегрирование.
5. Основные методы интегрирования: замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
6. Интегрирование некоторых классов функций (рациональные, иррациональные, содержащие тригонометрические выражения).
7. Интегрирование функции комплексного переменного.
8. Определенный интеграл и его приложения.
9. Определенный интеграл.
10. Геометрический и физический смысл интеграла.
11. Формула Ньютона-Лейбница.
12. Методы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле.
13. Приближенное вычисление определенного интеграла (метод трапеций и парабол).
14. Вычисление площадей плоских фигур, длины дуги, объем и площадь поверхности тел вращения.
15. Экономические приложения определенного интеграла.
16. Несобственные интегралы 1 и 2 рода.
17. Задачи интегрального исчисления с экономическим и управленческим содержанием.
18. Возможности применять знания в сфере экономики и управления, анализировать потенциал и тенденции развития российской и мировой экономик для решения практических и (или) исследовательских задач профессиональной деятельности в таможенном деле.

*Математические задачи*

1. Найти интегралы  $\int \sqrt{x} dx$ ,  $\int (x+5)^7 dx$ ,  $\int \sqrt[5]{(3x-4)^2} dx$ ,  $\int \frac{xdx}{36-5x^2}$ ,  $\int \frac{dx}{5x^2-36}$ ,  $\int \frac{dx}{\sqrt{5-36x^2}}$ ,  $\int \frac{dx}{\sqrt{36x^2-5}}$ ,  $\int \left( 5\cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2+1} \right) dx$



2. Найти интегралы  $\int(2\sqrt[5]{x} - \sqrt[3]{2x} + 7)dx$ ,  $\int \frac{(2\sqrt{x} + 1)^3 dx}{x\sqrt{x}}$ ,  $\int(e^x - e^{-x})^2 dx$ ,  $\int \frac{x+3}{x^2-5} dx$ ,  $\int \operatorname{tg}^2 x dx$ .
3. Найти интегралы, используя метод интегрирования по частям  $\int \ln x dx$ ,  $\int x \sin 5x dx$ ,  $\int (x^2 + 3x - 5)e^{2x} dx$ ,  $\int x \operatorname{arctg} x dx$ ,  $\int e^{ax} \cos bxdx$ .
4. Найти интегралы, используя метод замены переменной (метод подстановки)  $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$ ,  $\int \frac{dx}{4\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ .
5. Найти интегралы, используя методы интегрирования функций, которые содержат квадратный трехчлен в знаменателе дроби  $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}$ ,  $\int \frac{x+3}{x^2 - 2x - 5} dx$ ,  $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$ ,  $\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}} dx$ .
6. Найти интегралы  $\int \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 + 2x^2 - 8x} dx$ ,  $\int \frac{2x^2 + 5x - 8}{(x-1)^3(x+2)^2} dx$ ,  $\int \frac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x^4 + x} dx$ .
7. Найти интегралы, используя методы интегрирования выражений, содержащие тригонометрические функции  $\int \sin 3x \cos 7x dx$ ,  $\int \sin 2x \sin \frac{2x}{3} dx$ ,  $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x}$ ,  $\int \sin^5 x \cos^4 x dx$ ,  $\int \sin^4 x dx$ ,  $\int \frac{dx}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x}$ ,  $\int \operatorname{tg}^5 x dx$ .
8. Найти интегралы, используя методы интегрирования выражений, которые содержат иррациональность  $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} dx$ ,  $\int x^2 \sqrt{4-x^2} dx$ .
9. Найти неопределенные интегралы. Правильность полученных результатов проверить дифференцированием 1)  $\int \frac{xdx}{7+x^2}$ ; 2)  $\int \frac{(x+18)dx}{x^2-4x-12}$ ; 3)  $\int (3-x) \cos x dx$ .
10. Вычислить определенный интеграл  $\int_2^7 \frac{\sqrt{x+2} dx}{x}$ .
11. Вычислить интеграл  $\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$ ,  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} dx$ ,  $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$ ,  $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$ ,  $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$ ,  $\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2} dx}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}$ ,  $\int_1^4 \frac{\sqrt{x} dx}{1+\sqrt{x}}$ ,  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$ ,  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3+1)dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ .

$$\int_0^{\frac{\pi}{10}} (x+3)\sin 5x dx, \int_0^1 \arcsin x dx, \int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx, \int_1^e \ln^2 x dx.$$

12. Вычислить площади фигуры, что ограничена линиями  $y = \ln x$ ,  $x = 1$  и осью  $Ox$ .
13. Вычислить площади фигуры, что ограничена линиями  $y = \sqrt{x}$  и  $y = x^2$ .
14. Вычислить площади фигуры, что ограничена линиями  $y = 4 - x^2$  и  $y = x^2 - 2x$ .
15. Вычислить длину дуги параболы  $y = (x-1)^{\frac{3}{2}}$  между точками  $A(2; -1)$  и  $B(5; -8)$ .
16. Вычислить объем тела, образованного вращением около оси  $Ox$  фигуры, что ограничена линиями  $xy = 4$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$  и  $y = 0$ .
17. Вычислить объем тела, образованного вращением около оси  $Ox$  фигуры, что ограничена линиями  $2y = x^2$ ,  $2x + 2y - 3 = 0$ .
18. Вычислить объем тела, образованного вращением около оси  $Oy$  фигуры, что ограничена линиями  $y = x^2$  и  $y = x^3$ .
19. Вычислить интеграл  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$  или установить его расходящимся.
20. Вычислить  $\int_{-\infty}^{\infty} e^x dx$  или установить его расхождение.
21. Вычислить двойной интеграл  $\iint_{\sigma} (x^3 + y^3) dx dy$ , если область  $\sigma$  ограничена линиями  $y = \frac{1}{2}x$ ;  $y = x$ ;  $x = 4$ . Этот же интеграл вычислить, заменив порядок интегрирования.
22. Вычислить двойной интеграл  $\iint_{\sigma} (x^3 + y^3) d\sigma$ , если область интегрирования  $\sigma$ , является треугольник, который ограничен прямыми  $y = 0$ ;  $x = 2$ ;  $y = x/2$ .
23. Найти площадь фигуры, что ограничена линиями  $y = 4 - x^2$ ,  $3x - 2y - 6 = 0$ , с помощью двойного интеграла.
1. Чистые инвестиции заданы функцией  $f(t) = 7000\sqrt{t}$ . Обозначить:  
 а) прирост капитала за три года;  
 б) термин времени (в годах), после которого прирост капитала складывает 50000.  
 Найти среднее время, потраченное на освоение одного изделия в период освоения от  $x_1 = 100$  к  $x_2 = 121$  изделий, если функция переменной затрат времени на изготовление изделий  $t = ax^{-b}$ , где  $a = 600$ ,  $b = 0,5$ .
2. Пусть среднее значения затрат  $K(x) = 3x^2 + 4x + 1$ , выраженных в денежных единицах, если объем продукции  $x$  изменяется от 0 до 3 единиц. Указать объем продукции, при котором затраты принимают среднее значение. Обозначить дисконтную прибыль за три года по процентной ставке 8%, если базовые

- капиталовложения составили 10 млрд денежных единиц.
3. Скорость изменения затрат и дохода его деятельности обозначается формулами:  $V'(t) = 5 + 2t^{2/3}$  и  $D'(t) = 17 - t^{2/3}$ , где  $V$  и  $D$  измерялись миллионами рублей, а  $t$  измеряли годами. Обозначить, как долго предприятие было прибыльным и найти общую прибыль, который был получен за это время.
  4. *Стратегия развития.* Компания должна выбрать одно из возможных стратегий развития: 1) вложить 10 млн рублей в новое оборудование и получить 3 млн рублей прибыли каждого года на протяжении 10 лет; 2) закупить на 15 млн рублей более совершенное оборудование, которое позволит получить 5 млн рублей прибыли ежегодно на протяжении 7 лет. Какую стратегию нужно выбрать компании, если номинально учетная ежегодная ставка 10%.

### Тема 6. Обыкновенные дифференциальные уравнения

*Цель занятия:* Изучение методов решения дифференциальных уравнений и возможности применения полученных знаний для обоснования экономических решений в различных областях жизнедеятельности и в профессиональной деятельности.

*Компетенции:* УК-9 Способен принимать обоснованные экономические решения в различных областях жизнедеятельности.

*Тип занятия:* практическое занятие

*Форма проведения:* решение математических задач

*Основная тема (либо проблема) для обсуждения:* Особенности применения дифференциальных уравнений для решения практических и исследовательских задач в профессиональной деятельности и в различных областях жизнедеятельности.

#### *Математические задачи*

1. Дайте ответы на предложенные вопросы
  - Дать определение дифференциального уравнения (ДУ) первого порядка.
  - Привести примеры ДУ в различных областях науки.
  - Как проверить решение дифференциального уравнения?
  - Что называется общим решением ДУ?
  - Изложить методику решения задачи Коши.
  - Записать основные виды ДУ с разделенными и разделяющимися переменными, изложить методику их решения.
  - Дать определение общим и частным решениям ДУ первого порядка.
  - Дать определение и изложить методику решения однородного ДУ первого порядка
  - Дать определение и изложить методику решения линейных ДУ первого порядка (подстановка Бернулли и метод Лагранжа).
  - Дать определение и изложить методику решения уравнения Бернулли.
  - Дать определение и изложить методику решения уравнений в полных дифференциалах.
  - Привести примеры ДУ неразрешенных относительно производной.
  - Изложить основные понятия и определения ДУ высших порядков.
  - Изложить методику интегрирования ДУ, допускающих понижение порядка.
  - Дать определение линейного ДУ с переменными коэффициентами.
  - Записать однородное и неоднородное ДУ второго порядка с переменными коэффициентами, их общие и частные решения, дать пояснения.
  - Записать линейное однородное ДУ высшего порядка с постоянными коэффициентами.

- Изложить методику получения характеристического уравнения и его корней.
- Записать вид частных и общих решений линейного однородного ДУ для различных корней характеристического уравнения.
- Дать определение линейному неоднородному ДУ высшего порядка с постоянными коэффициентами, записать это уравнение.
- Сформулировать теорему об общем решении неоднородного линейного ДУ, записать общее решение такого уравнения.
- Какими двумя методами может быть определено частное решение неоднородного линейного ДУ с постоянными коэффициентами?
- Что называется системой ДУ?
- Дифференциальные уравнения (ДУ) первого порядка.
- Проверка решения дифференциальных уравнений.
- Составление ДУ семейств кривых.
- Начальные условия при решении дифференциальных уравнений.
- Единственность решения задачи Коши для дифференциальных уравнений.
- ДУ с разделяющимися переменными.
- Однородные ДУ первого порядка.
- Линейные ДУ первого порядка (метод вариации произвольной постоянной, метод подстановки).
- Уравнения Бернулли.
- Уравнения в полных дифференциалах.
- Дифференциальные уравнения высших порядков.
- ДУ допускающие понижение порядка (различные случаи).
- Линейные однородные ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.
- Линейные неоднородные ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.
- Задачи темы «Дифференциальные уравнения» с экономическим и управленческим содержанием

2. Решить дифференциальное уравнение:  $\frac{dy}{y} = 3x^2 dx$ , удовлетворяющее начальному условию  $y|_{x=0} = 2$ .

3. Решить дифференциальное уравнение  $x(y + 1) dx - (x^2 + 1) y dy = 0$ .

4. Найти частное решение дифференциального уравнения  $(1 + x^2) dy + y dx = 0$ , удовлетворяющее начальному условию  $y(0) = 1$ .

5. Найти решение однородного уравнения  $y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy}$ .

6. Решить дифференциальное уравнение  $y' - \frac{y}{x} = x$ .

7. Найти частное решение дифференциального уравнения  $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ , который удовлетворяет начальному условию  $y(0) = 0$ .

8. Найти общее решение дифференциального уравнения  $xy' + y = y^2 \ln x$ .

9. Проинтегрировать систему 
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + z + x, \\ \frac{dz}{dx} = -4y - 3z + 2x, \end{cases}$$

10. Найти общее решение системы 
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -7x_1 + x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 5x_2. \end{cases}$$
11. Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальному условию  $y=y_0$  при  $x=x_0$ :

$$y' \sin x - y \cos x = 1, \quad y_0 = 1, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

12. Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:  $y''x \ln x = y'$ ;  $y(e) = e - 1$ ;  $y'(e) = 1$ .
13. Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y'' - 5y' + 6y = 2 \cos x; \quad y(0) = 3; \quad y'(0) = \frac{1}{2}.$$

14. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 12x_1 + 5x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = 5x_1 + 12x_2. \end{cases}$$

15. Изменение производительности производства задается функцией  $z = 32 - 2^{-0,5t+5}$ , где  $t$  - время в месяцах. Найти объем продукции, произведенной: а) за первый месяц; б) за третий месяц; в) за шестой месяц; г) за последний месяц года, считая от начала внедрения от рассматриваемого технологического процесса.
16. Найти объем выпускаемой продукции за пять лет, если в функции Кобба-Дугласа  $A(t) = e^t; L(t) = (t+1)^2; K(t) = (100-3t)^2$ ;  $a_0 = 1; a = 1; \beta = \gamma = 0,5$  ( $t$  - время в годах).
17. После сбора 100 компьютеров оказалось, что в дальнейшем время убывает в соответствии с формулой  $y = 15x^{-0,14}$ . Найти время, которое потребуется для сборки еще 20 компьютеров (т. е. с номера 101 до номера 120).
18. Найти выигрыш потребителей и выигрыш поставщиков, если было установлено рыночное равновесие:  $p = 116 - x^2, \quad p = \frac{5}{3}x + 20$
19. Скорости изменения издержек и дохода во времени имеют следующий вид:  $C'(t) = 2 + t, R'(t) = 17 - 2t$ . Определить, когда производство следует остановить.
20. Инвестор намерен непрерывно вкладывать средства в развитие фирмы по производству мебели в течение трех лет, в соответствии с зависимостью  $I(t) = 10(1+t)$ , где  $I(t)$  - годовой объем вкладываемых средств в млн. руб. на момент времени  $t$  в годах. Найти увеличение капитала фирмы через три года.
21. Стоимость имущества в млн. руб. в течение 2021 г. изменяется в соответствии с зависимостью  $P = 250 + 50\sqrt{t}$ , где  $t = 0$  на 1 января 2021 г. и  $t = 1$  на 1 января 2022 г. Вычислить величину налога на имущество фирмы за 2021 г., если коэффициент

налогообложения равен 0,005.

22. Определить объем продукции, произведенной рабочим за третий час рабочего дня, если производительность труда характеризуется функцией  $f(t) = 3/(3t+1) + 4$ .
23. Определить запас товаров в магазине, образуемый за три дня, если поступление товаров характеризуется функцией  $f(t) = 2t + 5$ .
24. В условиях ненасыщаемости рынка найти объем производства по истечении шести месяцев, при норме инвестиций  $m = 0,6$ , продажной цене  $p = 0,15$  (ден.ед) и  $l = 0,4$ , если в начальный момент времени объем производства  $y_0 = y(0) = 24$  (ден.ед).
25. Известно, что рост числа  $y = y(t)$  жителей некоторого района описывается

уравнением  $\frac{dy}{dt} = \frac{0,2y}{m}(m - y)$ , где  $m$  – максимально возможное число жителей для данного района. В начальный момент времени число жителей составляло 1% от максимального. Через какой промежуток времени оно составит 80% от максимального?

26. Найти функцию спроса  $y = y(p)$ , если эластичность  $E_p$  постоянная и задана цена  $p$  при некотором значении спроса  $y$ : а)  $E_p = -1/2$ ,  $p=5$  при  $y=2$ ; б)  $E_p = -3$ ,  $p=2$  при  $y=27$ .
27. Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют соответственно вид

$$y = 50 - 2p - 4 \frac{dp}{dt};$$

$$x = 70 + 2p - 5 \frac{dp}{dt}.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени, если  $p(0) = 10$ , и определить, является ли равновесная цена устойчивой.

28. Государство решило оказать поддержку остановившему производство предприятию-банкроту. В течение года на счет предприятия непрерывно будут поступать денежные средства, причем кризисный управляющий может выбрать одну из схем господдержки: либо перечисленные средства равномерно возрастают и к концу года достигают некоторого фиксированного значения, либо средства равномерно убывают от данного фиксированного значения до нуля к концу года. Какая из предложенных схем приведет к выпуску большего объема продукции, если известно, что из-за ветхости оборудования коэффициент выбытия фондов за год равен двум, а показатель отдачи инвестиций в данной отрасли составляет 40 %?
29. Руководством сталелитейного завода принята полугодовая программа развития, по которой десятая часть всей выручки предприятия направляется на расширение производства. Известно, что кривая спроса задается уравнением  $p(y) = 330 - y$ , где  $p$  – цена в долларах одной тонны стали;  $y$  – ее объем в тоннах, и что скорость производства составляет один процент от вложенных инвестиций. Найти объем реализованной продукции за время действия программы, если до ее начала продавалось 30 т стали в месяц.
30. Единственная хлебопекарня поселка выпекает и продает тысячу буханок хлеба в сутки стоимостью 8 рублей за одну буханку. В течение месяца 3 % выручки от реализации хлеба будет направляться на расширение производства. Известно, что удвоение вложений в производство приводит к увеличению скорости выпечки хлеба в полтора раза. Сколько буханок хлеба в день будет выпекать пекарня к концу месяца?
31. Через сколько лет произойдет удвоение уровня цен при ежегодной инфляции в 7 %?

### Тема 7. Ряды

*Цель занятия:* Изучение методов анализа сходимости рядов и возможности применения полученных знаний для обоснования экономических решений в различных

областях жизнедеятельности и в профессиональной деятельности.

*Компетенции:* УК-9 Способен принимать обоснованные экономические решения в различных областях жизнедеятельности.

*Тип занятия:* практическое занятие

*Форма проведения:* решение математических задач

*Основная тема (либо проблема) для обсуждения:* Особенности применения теории рядов для решения практических и исследовательских задач в профессиональной деятельности и в различных областях жизнедеятельности.

*Математические задачи*

1. Дайте ответы на предложенные вопросы
  - Дать определение числового ряда.
  - Что понимается под суммой числового ряда?
  - При каких условиях числовые ряды сходятся и расходятся?
  - Сформулировать основные свойства сходящихся числовых рядов.
  - Сформулировать рассмотренные признаки сходимости числовых рядов.
  - Дать определение знакочередующегося числового ряда.
  - Сформулировать признак сходимости Лейбница.
  - При каких условиях числовой ряд является сходящимся абсолютно и сходящимся условно?
  - Сформулировать и записать признак Даламбера для знакопеременных (знакочередующихся) числовых рядов.
  - Дать определение степенного ряда.
  - Что понимается под сходимостью степенных рядов в точке, интервале, области?
  - Дать определение и записать формулы радиуса, интервала и области сходимости степенного ряда.
  - Какой степенной ряд называется обобщенным?
  - Записать выражения для рядов Тейлора и Маклорена.
  - Привести формулы для разложения элементарных функций в ряд Маклорена.
  - Сформулировать задачу вычисления значений функции посредством степенных рядов. Привести примеры. Изложить порядок оценки точности полученного результата
  - Написать ряд Фурье для функции, заданной на отрезке с периодом.
  - Написать формулы для определения коэффициентов этого ряда.
  - Числовые и степенные ряды.
  - Основные сведения о рядах.
  - Признаки сходимости ряда с положительными членами (признаки сравнения, Коши, Даламбера, интегральный).
  - Сходимость рядов с членами произвольного знака. Признак Лейбница.
  - Область сходимости степенного ряда.
  - Ряды Тейлора и Маклорена.
  - Применение рядов в приближенных вычислениях.
  - Приложения степенных рядов.
  - Задачи темы «Ряды» с экономическим и управленческим содержанием
2. Написать пять первых членов последовательности, если ее  $n$ -й член  $a_n$  имеет

вид: 1)  $\frac{1}{4n-1}$ ; 2)  $(-1)^n \cdot \frac{1}{4n-1}$ ; 3)  $\frac{2^n+1}{2^n}$ ; 4)  $\frac{2+(-1)^{n-1}}{n}$ .

3. Пользуясь непосредственно определением, показать, что ряд сходится, и найти его

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

сумму.

4. Пользуясь необходимым признаком сходимости, показать, что ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1} + \dots,$$

расходится.

5. Исследовать на сходимость ряд  $\frac{1}{5 \cdot 2} + \frac{1}{5 \cdot 2^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{5 \cdot 2^n} + \dots$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+1}$$

6. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \dots$$

7. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

8. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{1}{n \cdot 3^n} + \dots$$

9. Доказать сходимость ряда

10. С помощью признака Даламбера решить вопрос о сходимости ряда

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n} + \dots$$

11. Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}}$$

12. Исследовать на сходимость ряд )  $\sum_{n=1}^{\infty}$

13. Пользуясь признаком Даламбера, исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{10} + \frac{1 \cdot 2}{10^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{10^3} + \dots + \frac{n!}{10^n} + \dots$$

14. На основании признака Даламбера исследовать сходимость ряда

$$3 + \frac{3^2}{2^2} + \frac{3^3}{3^3} + \frac{3^4}{4^4} + \dots + \frac{3^n}{n^n} + \dots$$

15. Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{8n-1}\right)^n$



16. Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n^2+1)^2}$ .
17. Пользуясь признаком Лейбница, исследовать на сходимость знакопередающийся ряд  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$ .
18. Исследовать на сходимость ряд  $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} + \dots$ .
19. Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$ .
20. Найти область сходимости степенного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{3^n \cdot \sqrt{n}}$ .
21. Найти область сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^n \sqrt{n+1}}$ .
22. Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ .
23. Пусть на расчетный счет в течение  $n$  лет в конце года поступает  $M$  руб. Проценты начисляются в конце года по ставке  $i$ . Определите наращенную сумму и текущую сумму на начальный момент времени данного потока платежей.
24. Найдите начальную стоимость вечной ренты, гарантирующей ежегодное поступление на счет  $M$  рублей и начисление процентов по ставке  $i$ . Обе операции производятся в конце каждого года.

### Тема 8. Теория вероятностей

*Цель занятия:* Изучение основ теории вероятностей для применения знаний в сфере экономики и управления, для анализа потенциала и тенденций развития российской и мировой экономик при решении практических и (или) исследовательских задач в профессиональной деятельности.

*Компетенции:* ОПК-1 Способен применять знания в сфере экономики и управления, анализировать потенциал и тенденции развития российской и мировой экономик для решения практических и (или) исследовательских задач в профессиональной деятельности.

*Тип занятия:* практическое занятие

*Форма проведения:* устный ответ (в форме дискуссии), решение кейс-задач

*Основная тема (либо проблема) для обсуждения:* Особенности применения знаний основ теории вероятностей в сфере экономики и управления, для анализа потенциала и тенденций развития российской и мировой экономик при решении практических и (или) исследовательских задач в профессиональной деятельности.

*Вопросы для обсуждения:*

1. Случайные события и комбинаторика.
2. Основные понятия и определения случайных событий.
3. Классическое, статистическое и геометрическое определение вероятности события.
4. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
5. Формула полной вероятности.

6. Формула Бейеса (теорема гипотез).
7. Повторение независимые испытания.
8. Теорема Бернулли и ее следствия.
9. Теорема Пуассона.
10. Интегральная и дифференциальная теоремы Лапласа.
11. Формула Муавра-Лапласа.
12. Функция Лапласа.
13. Случайные величины. Основные понятия и определения.
14. Законы распределения вероятностей дискретных случайных величин (биномиальный, геометрический, Пуассона).
15. Числовые характеристики случайных величин.
16. Функция и плотность распределения случайной величины.
17. Законы распределения вероятностей непрерывных случайных величин (равномерный, показательный).
18. Нормальный закон распределения вероятностей случайных величин.
19. Системы случайных величин, законы их распределения, числовые характеристики.
20. Предельные теоремы теории вероятностей.
21. Задачи теории вероятностей с экономическим и управленческим содержанием для применения знаний в сфере экономики и управления с целью анализа потенциала и тенденций развития российской и мировой экономик для решения практических и исследовательских задач в таможенном деле.

#### *Кейс-задачи*

1. Две организации производят одинаковую продукцию. Вероятность того, что АО «Стройка» выйдет на мировой рынок, равна 0,6, а вероятность выхода на мировой уровень ПАО «Стройоптторг» равен 0,7. Найти вероятность того, что только одна организация выйдет на мировой рынок.
2. В городе 10 коммерческих банков. У каждого риск банкротства в течение года составляет 10 %. Чему равна вероятность того, что в течение года обанкротится больше одного банка?
3. Шесть клиентов случайным образом обращаются в 5 фирм. Найти вероятность того, что, хотя бы в одну фирму никто не обратится.
4. Среди сотрудников фирмы 28% знают английский язык, 30% – немецкий, 42% – французский; английский и немецкий – 8%, английский и французский – 10%, немецкий и французский – 5%, все три языка – 3%. Найти вероятность того, что случайно выбранный сотрудник фирмы: а) знает английский или немецкий; б) знает английский, немецкий или французский; в) не знает ни один из перечисленных языков.
5. Фирма имеет три источника поставки комплектующих – фирмы А, В, С. На долю фирмы А приходится 50% общего объема поставок, В – 30% и С – 20%. Из практики известно, что среди поставляемых фирмой А деталей 10% бракованных, фирмой В – 5% и фирмой С – 6%. Какова вероятность, что взятая наугад деталь окажется годной?
6. Курс акции за день может подняться на 1 пункт с вероятностью 50%, опуститься на 1 пункт с вероятностью 30% и остаться неизменным с вероятностью 20%. Найти вероятность того, что за 5 дней торгов курс поднимется на 2 пункта.
7. Предприниматель решил вложить свои средства поровну в два «независимых» контракта, каждый из которых действует два года и принесет ему прибыль в размере 100%. Вероятность того, что каждый из контрактов за два года не «лопнет», равна 0.8. Какова вероятность риска? Или какова вероятность того, через два года по истечении

- срока действия этих контрактов, предприниматель, по меньшей мере, «ничего не потеряет»? (*Ответ: 0.96*).
8. Вероятность того, что в локомотивном депо расход электроэнергии превысит суточную норму, равна 0,4. 1) Какова вероятность того, что за 5 рабочих дней будет зафиксирован перерасход электроэнергии в течение 2 дней? Произвести вычисления: а) по формуле Бернулли; б) по формуле Пуассона; в) по локальной теореме Лапласа. Сделать вывод. 2) Найти вероятность того, что перерасхода энергии не будет хотя бы в течение 3 дней, используя: а) формулу Бернулли; б) интегральную теорему Лапласа.
  9. На борту самолета 12 мест рядом с запасными выходами и 18 мест за перегородками, разделяющими салоны. Остальные места неудобны для пассажира высокого роста. Пассажир Волков высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру Волкову достанется удобное место, если всего в самолете 300 мест.
  10. Наблюдения показывают, что в среднем среди 1000 новорожденных детей 515 мальчиков. Найдите частоту рождения мальчика в такой серии наблюдений.
  11. Из колоды в 36 карт одну за другой вытягивают две карты, не возвращая карту обратно. Какова вероятность того, что они одного цвета?
  12. В классе 7 мальчиков и 14 девочек. 1 сентября случайным образом определяют двух дежурных на 2 сентября, которые должны приготовить класс к занятиям. Найдите вероятность того, что будут дежурить два мальчика.
  13. В круг радиуса  $R$  наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что эта точка окажется внутри данного вписанного правильного треугольника.
  14. Зачет по стрельбе курсант сдаст, если получит оценку не ниже 4. Какова вероятность сдачи зачета, если известно, что курсант получает за стрельбу оценку 5 с вероятностью 0,3 и оценку 4 с вероятностью 0,6?
  15. Наудачу берется трехзначное число. Какова вероятность того, что хотя бы две его цифры совпадают?
  16. Прибор, состоящий из двух блоков, выходит из строя, если выходят из строя оба блока. Вероятность безотказной работы за определенный промежуток времени первого блока составляет 0,9, второго - 0,8, обоих блоков - 0,75. Найти вероятность безотказной работы прибора в течение указанного промежутка.
  17. Школьнику надо сдать зачет по математике. В каждом билете - по два вопроса. Всего 25 билетов. Из них 5 билетов школьник вообще не учил. В каждом из оставшихся 20 билетов он хотя бы один вопрос выучил, причем в 18 билетах школьник выучил первый вопрос и в 15 билетах - второй вопрос. Школьник может получить удовлетворительную оценку, если вытащит такой билет, оба вопроса которого он знает. Какова вероятность того, что школьник сдаст зачет, если он первый тянет билет?
  18. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определенного продукта по телевидению, равна 0,04. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу того же продукта на рекламном стенде, равна 0,06. Чему равна вероятность того, что: а) потребитель увидит обе рекламы; б) потребитель увидит хотя бы одну рекламу?
  19. В урне 6 шаров - 2 белых и 4 черных. Без возвращения выбираем два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.
  20. В рекламной фирме 21% работников получают высокую заработную плату. Известно также, что 40% работников фирмы - женщины, а 6,4% работников - женщины,

- получающие высокую заработную плату. Можно ли утверждать, что на фирме существует дискриминация женщин в оплате труда?
21. С первого станка на сборку поступает 40%, со второго - 30% и с третьего - 30% всех деталей. Вероятности изготовления бракованной детали равны для каждого станка соответственно 0,01, 0,03 и 0,05. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь, поступившая на сборку, бракованная.
  22. В части А Единого государственного экзамена по математике в 2005 году было 10 заданий с выбором ответа. К каждому из них предлагается 4 варианта ответа, из которых только один верный. Если ученик не знает предмет и отвечает наугад, то с вероятностью  $\frac{1}{4}$  он выберет правильный ответ, а с вероятностью  $\frac{3}{4}$  - ошибется. Для получения положительной оценки за экзамен необходимо правильно ответить минимум на 6 заданий. Какова вероятность того, что нерадивый ученик сдаст экзамен?
  23. Трое игроков играют в карты. Каждому из них сдано по 10 карт и две карты оставлены в прикупе. Один из игроков видит, что у него на руках 6 карт бубновой масти и 4 — не бубновой. Он сбрасывает две карты из этих четырех и берет себе прикуп. Найти вероятность того, что он прикупит две бубновые карты.
  24. Полная колода карт (52 листа) делится наугад на две равные пачки по 26 листов. Найти вероятности следующих событий:  $A$  — в каждой из пачек окажется по два туза;  $B$  — в одной из пачек не будет ни одного туза, а в другой — все четыре;  $C$  — в одной из пачек будет один туз, а в другой — три.
  25. На девяти карточках написаны цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Две из них вынимаются наугад и укладываются на стол в порядке появления, затем читается полученное число, например 07 (семь), 14 (четырнадцать) и т. п. Найти вероятность того, что число будет четным.
  26. На пяти карточках написаны цифры: 1, 2, 3, 4, 5. Две из них, одна за другой, вынимаются. Найти вероятность того, что число на второй карточке будет больше, чем на первой.
  27. В урне  $a$  белых,  $b$  черных и  $c$  красных шаров. Из урны вынимают один за другим все находящиеся в ней шары и записывают их цвета. Найти вероятность того, что в этом списке белый цвет появится раньше черного.
  28. Имеется две урны: в первой  $a$  белых и  $b$  черных шаров; во второй  $c$  белых и  $d$  черных. Из каждой урны вынимается по шару. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.
  29. Из полной колоды карт (52 листа, 4 масти) вынимается сразу несколько карт. Сколько карт нужно вынуть для того, чтобы с вероятностью, большей чем 0,50, утверждать, что среди них будут карты одной и той же масти?
  30. Четыре шарика случайным образом разбрасываются по четырем лункам; каждый шарик попадает в ту или другую лунку с одинаковой вероятностью и независимо от других (препятствий к попаданию в одну и ту же лунку нескольких шариков нет). Найти вероятность того, что в одной из лунок окажется три шарика, в другой — один, а в двух остальных лунках шариков не будет.
  31. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий:  $A$  — все пассажиры выйдут на четвертом этаже;  $B$  — все пассажиры выйдут одновременно (на одном и том же этаже);  $C$  — все пассажиры выйдут на разных этажах.

32. Производится стрельба ракетами по некоторой наблюдаемой цели. Вероятность попадания каждой ракеты в цель равна  $p$ ; попадания отдельных ракет независимы. Каждая попавшая ракета поражает цель с вероятностью  $P_1$ . Стрельба ведется до поражения цели или до израсходования всего боезапаса; на базе имеется боезапас  $n$  ракет ( $n > 2$ ). Найти вероятность того, что не весь этот боезапас будет израсходован.
33. Производится стрельба двумя ракетами по самолету. Самолет имеет оборонительное вооружение, позволяющее ему произвести по каждой ракете два независимых выстрела. Каждым из этих выстрелов ракета поражается с вероятностью  $p$ . Если ракета не поражена, то она независимо от другой поражает самолет с вероятностью  $P$ . Найти вероятность того, что самолет будет поражен.
34. Из полной колоды карт (52 листа) вынимают сразу две карты. Одну из них смотрят — она оказалась дамой; после этого две вынутые карты перемешивают, и одну из них берут наугад. Найти вероятность того, что она окажется тузом.
35. Имеются три одинаковые с виду урны. В первой  $a$  белых шаров и  $b$  черных; во второй  $c$  белых и  $d$  черных; в третьей только белые шары. Некто подходит наугад к одной из урн и вынимает из нее один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.
36. Прибор может работать в двух режимах: 1) нормальном и 2) ненормальном. Нормальный режим наблюдается в 80% всех случаев работы прибора; ненормальный — в 20%. Вероятность выхода прибора из строя за время  $t$  в нормальном режиме равна 0,1; в ненормальном — 0,7. Найти полную вероятность  $p$  выхода прибора из строя за время  $t$ .
37. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовленных отлично, 4 — хорошо, 2 — посредственно и 1 — плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный — на 16, посредственно — на 10, плохо — на 5. Вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент подготовлен: а) отлично; б) плохо.
38. Производится четыре независимых выстрела по некоторой цели. Вероятности попадания при разных выстрелах различны и равны:  $P_1 = 0,1$ ;  $P_2 = 0,2$ ;  $P_3 = 0,3$ ;  $P_4 = 0,4$ . Найти вероятности  $P_{0,4}$ ;  $P_{1,4}$ ;  $P_{2,4}$ ;  $P_{3,4}$ ;  $P_{4,4}$  ни одного, одного, двух, трех, четырех попаданий; вероятность  $R_{1,4}$  хотя бы одного попадания; вероятность  $R_{2,4}$  не менее двух попаданий.
39. Завод изготавливает изделия, каждое из которых должно подвергаться четырем видам испытаний. Первое испытание изделие проходит благополучно с вероятностью 0,9; второе — с вероятностью 0,95; третье — с вероятностью 0,8 и четвертое — с вероятностью 0,85. Найти вероятность того, что изделие пройдет благополучно:  $A$  — все четыре испытания;  $B$  — ровно два испытания (из четырех);  $C$  — не менее двух испытаний (из четырех).
40. Человек, принадлежащий к определенной группе населения, с вероятностью 0,2 оказывается брюнетом, с вероятностью 0,3 — шатеном, с вероятностью 0,4 — блондином и с вероятностью 0,1 — рыжим. Выбирается наугад группа из шести человек. Найти вероятности следующих событий:  $A$  — в составе группы не меньше четырех блондинов;  $B$  — в составе группы хотя бы один рыжий;  $C$  — в составе группы равное число блондинов и шатенов.
41. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры, и помня лишь, что эти

цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

42. Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет: а) менее 2 раз; б) не менее 2 раз.
43. Заданы математическое ожидание  $m$  и среднее квадратическое отклонение  $\sigma$  нормально распределенной случайной величины  $x$ . Найти: 1) вероятность того, что  $x$  примет значение, принадлежащее интервалу  $(\alpha; \beta)$ ; 2) вероятность того, что абсолютная величина отклонения  $|x - m|$  окажется меньше  $\delta$ :  
 $m = 15, \sigma = 2, \alpha = 16, \beta = 25, \delta = 4$ .

### Тема 9. Математическая статистика

*Цель занятия:* Изучение основ математической статистики с целью решения профессиональных и исследовательских задач в сфере таможенного дела на основе знаний экономики, управления, потенциала и тенденций развития российской и мировой экономик.

*Компетенции:* ОПК-1 Способен применять знания в сфере экономики и управления, анализировать потенциал и тенденции развития российской и мировой экономик для решения практических и (или) исследовательских задач в профессиональной деятельности.

*Тип занятия:* практическое занятие

*Форма проведения:* решение кейс-задач

*Основная тема (либо проблема) для обсуждения:* Значение основ математической статистики для анализа потенциала и тенденций развития российской и мировой экономик при решении практических и исследовательских задач в таможенном деле

#### *Кейс-задачи*

1. Дайте ответы на предложенные вопросы
  - Изложить основные задачи математической статистики.
  - Изложить основные определения (генеральная и выборочная совокупности, вариационный ряд, статистическое распределение выборки, полигон и гистограмма).
  - Что называется выборочной средней и выборочной дисперсией случайной величины?
  - Что называется доверительной вероятностью и доверительным интервалом?
  - Дать определение статистической гипотезе.
  - Изложить методику применения критерия Пирсона для проверки гипотезы о нормальном распределении случайной величины.
  - Дать определение и сформулировать свойства коэффициента корреляции.
  - Дать определение выборочного коэффициента корреляции.
  - Записать уравнения прямых регрессии.
  - Записать уравнения выборочных прямых регрессии.
  - Дать определение корреляционного отношения. Объяснить его вероятностный смысл.
  - Основы теории математической статистики.
  - Предмет и задачи математической статистики.
  - Генеральная и выборочная совокупность.
  - Вариационный ряд.
  - Статистическое распределение выборки.
  - Полигон и гистограмма.
  - Статистические оценки параметров распределения.
  - Математическая статистика.

- Основы теории математической статистики.
  - Статистическая проверка гипотез.
  - Критерий согласия Пирсона.
  - Элементы теории корреляции.
  - Линейная регрессия.
  - Возможности применять знания в сфере экономики и управления, анализировать потенциал и тенденции развития российской и мировой экономик для решения практических и (или) исследовательских задач профессиональной деятельности в таможенном деле.
2. В страховой компании 10 тыс. клиентов. Страховой взнос каждого клиента составляет 500 руб. Вероятность наступления страхового случая равна (по оценкам экспертов компании) 0,005, а страховая выплата при наступлении страхового случая составляет 50 тыс. руб. а) Определить, на какую прибыль может рассчитывать страховая компания с вероятностью 0,99. б) Определить минимальный размер страховой премии, при котором страховая компания получит прибыль, не меньшую 1 млн руб., с вероятностью 0,999.
  3. Для определения среднего дохода налогоплательщиков города налоговой инспекцией была проведена проверка 250 жителей этого города, отобранных случайным образом. Оценить вероятность того, что средний годовой доход жителей города отклонится от

$$\bar{X} = \frac{1}{250} \sum_{i=1}^{250} X_i$$

- среднего арифметического  $\bar{X}$  годовых доходов выбранных 250 жителей не более чем 153 на 1 000 руб., если известно, что среднее квадратичное отклонение годового дохода не превышает 2 500 руб.
4. По статистическим данным в среднем 87 % новорожденных доживают до 50 лет (т. е. вероятность дожития до 50 лет равна 0,87). С помощью неравенства Чебышёва оценить вероятность того, что из 1000 новорожденных доля (относительная частота) доживших до 50 лет будет отличаться от вероятности не более чем на 0,04 (по модулю).
  5. Средние ежемесячные расходы на покупку канцелярских принадлежностей для отделения банка составляют 3000 руб., а среднее квадратичное отклонение этой случайной величины не превышает 750 руб. Оценить вероятность того, что расходы на канцелярские принадлежности в любой наугад выбранный месяц не превысят 6 000 руб., используя: а) неравенство Маркова; б) неравенство Чебышёва.
  6. Банк выдает кредиты по 1 млн руб. сроком на 1 год. Известно, что в среднем вероятность невозврата кредита = 1 %. Какую процентную ставку должен установить банк, чтобы в среднем иметь прибыль?
  7. Необходимо изучить распределение размера обуви, проданной в интересующем магазине, с целью обеспечить нужное количество обуви каждого размера. Получены следующие данные о размере проданной в магазине за сутки обуви (женской): 35, 35, 36, 36, ..., 42, 42. Всего продано 100 штук. Сделать выводы.
  8. Предприимчивый Семен Семенович хочет проверить надпись на рекламном баннере, которая гласит, что в лотерее «СтопЖирЛото» почти треть всех билетов выигрышные. Чтобы реализовать свою задумку, он попросил  $n$  своих друзей купить по 10 лотерейных билетов. Пусть  $X_i$  — число выигрышных билетов друга  $i$  и  $p$  — вероятность выигрыша одного билета. а) Какое распределение имеет величина  $X_i$ ? б) Записать функцию правдоподобия  $L(p)$  для выборки  $X_1, \dots, X_n$ . в) Методом максимального правдоподобия найти оценку  $\hat{p}$ . г) Найти информацию Фишера для одного наблюдения  $i(p)$ . д) Будет ли оценка параметра  $p$ , полученная по методу

максимального правдоподобия, эффективной? е) Найти оценку максимального правдоподобия математического ожидания и дисперсии выигранных произвольным другом билетов. ж) Дана реализация случайной выборки пяти друзей Семена Семеновича. Число выигранных билетов оказалось равно (3, 4, 0, 2, 6). Найти значение точечной оценки вероятности выигрыша  $p$ . Как вы думаете, похоже ли утверждение организаторов на правду?

9. Из генеральной совокупности извлечена выборка объёма  $n = 21$ :

$x_i$	2	6	8	10	$\Sigma$
$n_i$	3	4	6	8	21

Требуется найти: 1) и построить эмпирическую функцию распределения; 2) выборочное среднее, «исправленное» СКО, выборочную моду и медиану.

10. Записать в виде вариационного ряда выборку 20, 19, 12, 13, 16, 17, 17, 14, 16, 14, 13, 19, 18, 16, 14. Представить статистическое распределение выборки. Построить полигон относительных частот для статистического ряда. Вычислить числовые характеристики выборки: выборочное среднее, «исправленную» и выборочную дисперсии, «исправленное» среднеквадратическое отклонение (СКО).

11. Найти выборочное среднее, моду, медиану и выборочное СКО выборки объёмом  $n = 70$ , распределение которой задано следующей таблицей:

Интервалы	0 – 1,02	1,02 – 2,04	2,04 – 3,06	3,06 – 4,08	4,08 – 5,1	Сумма
Частота	4	28	19	12	7	140

Построить гистограмму и полигон частот.

12. Дан статистический ряд признака  $X$ :

$x_i$	3,8	3,9	4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	$\Sigma$
$n_i$	2	2	5	7	6	4	3	1	30

Найти начальные и центральные моменты первых четырёх порядков признака  $X$ , а также определить асимметрию и эксцесс.

13. Предельная нагрузка для выборки из 50 стальных стержней характеризуется следующим рядом:

$x_i$	11	13	14	16	17
$n_i$	4	5	30	7	4

Считая распределение предельной нагрузки  $X$  нормальным, построить доверительные интервалы для оценки с надёжностью  $\gamma = 0,99$  средней предельной нагрузки и СКО предельной нагрузки стальных стержней партии, из которой произведена выборка.

14. В результате эксперимента получены данные, представленные в виде статистического ряда:

38 60 41 51 33 42 45 21 53 60 60 52 47 46 49 49 14 57 54 59 30  
40 50 59 30 61 56 58 42 54 44 42 32 45 60 43 41 58 48 72 48 47 39 28  
47 35 65 61 77 67.

Требуется: 1) Записать значения результатов эксперимента в виде вариационного ряда.

2) Представить данную выборку в виде интервального статистического ряда. 3) Найти

числовые характеристики выборки:  $\bar{x}$ ,  $D_B$ ,  $S^2$ ,  $S$ . 4) Определить доверительные интервалы неизвестного математического ожидания и неизвестного среднего квадратического отклонения. Предполагается, что генеральная совокупность имеет нормальное распределение. Доверительную вероятность принять равной 0,95.

15. Требуется при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  проверить по критерию согласия Пирсона гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические частоты  $n_i$  и теоретические частоты  $n'_i$ :



$n_i$	8	10	18	27	17	11	9
$n'_i$	5	15	16	25	20	12	7

16. Из генеральной совокупности извлечена выборка, представленная в виде ряда. Требуется проверить, согласуются ли выборочные данные с гипотезой о нормальном распределении случайной величины  $X$  с помощью критерия согласия Пирсона при уровне значимости  $\alpha = 0,05$ , разбив отрезок  $[x_{min}; x_{max}]$  на  $l$  интервалов одинаковой длины. Величину  $l$  рассчитать по формуле Стерджеса  $l = 1 + 3,322 \cdot \lg n$ .

2,1	2,3	1,5	3,1	2,7	1,9	2,4	0,9	2,5	1,1
1,3	2,9	2,3	3,9	2,4	3,6	1,6	3,2	2,9	2
2,1	3,3	0,8	3,5	1,7	2,6	4,1	2,8	1,2	2,5
1,1	2,4	1,5	3,2	2,7	1,5	3,7	1,9	3,1	4
4,1	2,9	2	1,1	0,7	3,3	2,5	1,6	2,4	2,1
3,2	0,9	2,8	4,2	2,8	1,9	1,2	1,7	3,5	2
2,7	3,9	2,4	1,7	3,6	2,5	0,8	3,1	2,1	1,3

3,2	1,6	0,7	2,6	1,3	2	3,7	2,9	4	3,1
2,8	4,1	1,9	3,6	3,3	2,9	0,6	1,5	1,2	2,4
1,1	3,5	1,6	2,4	3,9	2,7	2,5	1,9	2,6	3,2

17. По заданной таблице зависимости признаков  $X$  и  $Y$

$X$	0	1.7	4.7	7.5	8.5
$Y$	-3.2	-2.7	-1.0	0.2	1.8

Вычислить выборочный коэффициент корреляции и остаточную дисперсию. Записать уравнения прямой регрессии  $X$  на  $Y$ . Построить корреляционное поле и линию регрессии на корреляционном поле.

18. Таблица значений признака  $Y$  при данных значениях признака  $X$  имеет вид:

$Y$	$X$					$n_y$
	5	10	15	20		
10	2	-	-	-	-	2
20	5	4	1	-	-	10
30	3	8	6	3	-	20
40	-	3	6	6	-	15
50	-	-	2	1	-	3
$n_x$	10	15	15	10		$n = 50$

Построить корреляционное поле. Найти выборочный коэффициент корреляции, оценить его значимость. Записать уравнения прямой линии регрессии  $Y$  на  $X$ .

19. Из генеральной совокупности извлечена выборка, представленная в виде

$x_i$	4	6	7	8	10	11	12
$n_i$	3	7	10	11	9	6	4

статистического ряда:

Требуется: 1) вычислить выборочное среднее  $\bar{x}$ , выборочную дисперсию  $D_B$ , исправленную выборочную дисперсию  $S^2$  и среднее квадратичное отклонение  $s$ ; 2) найти размах варьирования; моду и медиану; 3) построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения; 4) проверить, согласуются ли выборочные данные с гипотезой о нормальном распределении случайной величины  $X$  графически и с помощью критерия согласия Пирсона при уровне значимости  $\alpha = 0,05$ , представив данную выборку в виде интервального ряда. Количество интервалов рассчитать по формуле Стерджеса  $l = 1 + 3,322 \lg n$ ; 5) найти с доверительной вероятностью  $\gamma = 0,95$  ( $\gamma = 0,99$ ) доверительный интервал для математического ожидания, а также доверительный интервал для  $\sigma(x)$ .

20. По заданной таблице зависимости признаков  $X$  и  $Y$ :

1) Вычислить выборочный коэффициент корреляции; проверить его на значимость, приняв  $\alpha = 0,05$ .

2) Методом наименьших квадратов выровнять зависимость  $Y$  от  $X$  по прямой  $y = a + bx$ .

3) Вычислить остаточную дисперсию, сделать вывод.

4) Построить корреляционное поле и линию регрессии на корреляционном поле.

<b>X</b>	-2	-1	0	1	2	3
<b>Y</b>	5,6	5	4,3	4	3,6	3

## 6.2. Самостоятельная работа обучающихся

### Тема 1. Аналитическая геометрия, векторы и координатный анализ

*Вид работы:* изучение литературы по теме, подготовка к практическому занятию, решение, заданных для самостоятельной работы, задач (кейс-задач).

*Рассматриваемые вопросы:*

1. Дать определение вектора.
2. Когда векторы коллинеарны, компланарны, равны?
3. Изложить основные свойства линейных операций над векторами.
4. Что называется проекцией вектора на ось?
5. Записать формулы для определения проекций вектора на оси системы координат.
6. Дать определение скалярного произведения векторов.
7. Перечислить свойства скалярного произведения.
8. Записать формулу скалярного произведения в координатной форме.
9. Записать формулу для определения угла между векторами.
10. Сформулировать условие ортогональности векторов.
11. Дать определения векторного произведения двух векторов.
12. Чему равно векторное произведение одноименных и разноименных ортов?
13. Записать формулу векторного произведения в координатной форме.
14. Записать формулу для определения площади параллелограмма, треугольника.
15. Дать определение смешанного произведения трех векторов.
16. Записать формулу смешанного произведения в координатной форме.
17. Декартовы и полярные координаты точки на плоскости.
18. Записать общее уравнение прямой.
19. Записать нормальное уравнение прямой.
20. Записать уравнение прямой с угловым коэффициентом.
21. Записать уравнение прямой в отрезках.
22. Объяснить методику перехода от общего уравнения к другим видам уравнений.
23. Записать формулы основных задач на прямую на плоскости (точка пересечения, угол между прямыми, расстояние от точки до прямой).
24. Сформулировать признаки параллельности и перпендикулярности двух прямых.
25. Записать уравнения окружности (каноническое и со смещенным центром).
26. Записать уравнения эллипса (каноническое и со смещенным центром).
27. Записать уравнения гиперболы (каноническое и со смещенным центром).
28. Записать уравнения параболы (каноническое и со смещенным центром).
29. Указать характерные линии и точки кривых второго порядка.
30. Объяснить методику построения эллипса, гиперболы и параболы.
31. Что называется направляющим вектором прямой в пространстве?

32. Записать и прокомментировать канонические уравнения прямой.
33. Записать и прокомментировать параметрические уравнения прямой.
34. Сформулировать условия параллельности и перпендикулярности прямых.
35. Записать и объяснить различные варианты общих уравнений плоскости.
36. Записать и прокомментировать уравнение плоскости в отрезках.
37. Записать и прокомментировать уравнение плоскости с угловым коэффициентом.
38. Что называется нормальным вектором плоскости?
39. Привести примеры взаимного расположения двух плоскостей в пространстве (пересечение, параллельность, перпендикулярность, угол между плоскостями).
40. Сформулировать условие параллельности прямой и плоскости в пространстве.
41. Сформулировать условие, когда прямая лежит в плоскости.
42. Записать уравнения основных поверхностей второго порядка, изобразить схематично (сфера, эллипсоид, гиперболоид, параболоид, цилиндрические поверхности).
43. Возможности применения полученных сведений с экономическим обоснованием решения в различных областях жизнедеятельности и профессиональной деятельности таможенного дела.

*Задачи для самостоятельной работы*

1. Даны векторы  $\vec{a} = (2; -1; -2)$  и  $\vec{b} = (8; -4; 0)$ .
2. Найти: а) векторы  $\vec{c} = 2\vec{a}$  и  $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$ ; б) длины векторов  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$ ; в) скалярный квадрат вектора  $\vec{d}$ ; г) скалярное произведение векторов  $(\vec{c}, \vec{d})$ ; д) угол между векторами  $(\vec{c}, \vec{d})$ ;
3. Заданы точки  $A(0; -1; 2)$  и  $B(-1, 1, 4)$ . Найти координаты, длину и направляющие косинусы вектора  $\vec{AB}$ .
4. Пусть  $ABCD$  — параллелограмм.  $M$  и  $N$  — середины его сторон (рис. 2.10). Разложить вектор  $\vec{DC}$  по векторам  $\vec{a} = \vec{AM}$ ,  $\vec{b} = \vec{AN}$ .

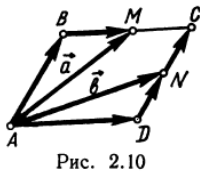


Рис. 2.10

5. Найти скалярные произведения векторов  $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$  и  $\vec{n} = 4\vec{a} + 5\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\pi}{3}$ .
6. Найти длину вектора  $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,  $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\pi}{3}$ .
7. Вычислить, какую работу выполняет сила  $\vec{F} = (2; -1; 4)$ , которая прямолинейно перемещает материальную точку из точки  $M(-1; 0; 3)$  в точку  $N(2; -3; 5)$ .
8. Даны вершины треугольника:  $A(-5, 3)$ ,  $B(-4, -6)$ ,  $C(0, 2)$ . Написать: а) уравнение медианы  $AM$ , б) высоты  $АН$ , в) найти угол между  $AM$  и  $АН$ .
9. Найти площадь треугольника, заданного вершинами  $A(1; 2; 0)$ ,  $B(0; -2; 1)$ ,  $C(-1; 0; 2)$ .

10. Найти длину высоты  $AH$   $\square ABC : A(-5, 3), B(-4, -6), C(0, 2)$ .
11. Найти угол между прямыми  $3x - 4y + 1 = 0$  и  $5x - 12y + 3 = 0$
12. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(1, 2, -3), B(0, 1, -1), C(7, -3, 5)$ .
13. Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $(-8; 1)$  параллельно прямой  $2x - y + 7 = 0$ .
14. Медианы  $BM$  и  $CN$  (рис. 3.25) треугольника  $ABC$  лежат на прямых  $x + y = 3$  и  $2x + 3y = 1$ , а точка  $A(1; 1)$  — вершина треугольника. Составить уравнение прямой  $BC$ .
15. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(1; 2; 3)$  перпендикулярно вектору  $\vec{n} = (-1; -3; 1)$ .
16. Найти объем тетраэдра, заданного вершинами  $A(2; -1; 0), B(5; 5; 3), C(3; 2; -2), D(4; 1; 2)$ .
17. Доказать, что точки  $A(0; 1; 2), B(-2; 0; -1), C(-1; 5; 8), D(1, 6, 11)$  лежат в одной плоскости.
18. Написать общее уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1(1; 2; 3), M_2(-1; 0; 2), M_3(-2; 1; 0)$ .
19. Найти угол между плоскостями  $\alpha_1: 2x + 4y + 5 = 0$ , и  $\alpha_2: 2x - y + 2z = 0$ .
20. Написать уравнение линии центров окружностей  $x^2 + y^2 - 5x = 0$  и  $x^2 + 2x + y^2 + y = 1$ .
21. Написать уравнение окружности, если точки  $A(-1; 4)$  и  $B(3; 2)$  являются концами его диаметра.
22. Найти центр и радиус окружности  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 23 = 0$ .
23. Найти эксцентриситет эллипса  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$
24. Найти координаты центра и написать уравнения асимптот гиперболы  $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$ .
25. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки  $M_1(3; 2)$  и  $M_2(4; \frac{2\sqrt{2}}{3})$ , если его фокусы лежат на оси  $Ox$  симметрично началу координат.
26. Установить, что уравнения  $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$  определяет гиперболу. Найти ее центр и полуоси.
27. Привести уравнение второго порядка к каноническому виду, назвать и построить кривую:  $4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$ .

## Тема 2. Элементы линейной алгебры

*Вид работы:* изучение литературы по теме, подготовка к практическому занятию, решение, заданных для самостоятельной работы, задач (кейс-задач).

*Рассматриваемые вопросы:*

1. Что называется матрицей – строкой (матрицей - столбцом)?
2. Дать определение матрицы (в общем случае).
3. Что называется единичной матрицей?
4. Перечислите основные линейные операции над матрицами.
5. Изложить принцип умножения строки на столбец.
6. Изложить методику нахождения произведения матриц.
7. Изложить методику возведения матрицы в натуральную степень.

8. Что называется определителем квадратной матрицы?
9. Изложить методику вычисления определителей 2-ого и 3-его порядков.
10. Сформулировать теорему разложения определителя по строке (столбцу).
11. Какие преобразования матриц называются элементарными?
12. Сформулировать свойства определителя.
13. Что называется решением системы линейных уравнений?
14. Перечислить основные наименования линейных систем в зависимости от вида решений.
15. Дать определение обратной матрицы.
16. Дать определение минору и алгебраическому дополнению элемента определителя.
17. Изложить методику нахождения обратной матрицы (2 способа).
18. Записать систему уравнений в матричной форме.
19. Изложить алгоритм решения линейной системы матричным методом.
20. Сформулировать теорему Крамера.
21. Изложить методику решения системы уравнений методом Крамера.
22. Дать определение ранга матрицы.
23. Изложить методику нахождения ранга матрицы.
24. Сформулировать теорему Кронекера-Капелли.
25. Изложить методику исследования система методом Гаусса.
26. Изложить методику решения системы методом Гаусса (прямой и обратный ход).
27. Возможности применять знания в сфере экономики и управления, анализировать потенциал и тенденции развития российской и мировой экономик для решения практических и (или) исследовательских задач в профессиональной деятельности в таможенном деле.

*Задачи для самостоятельной работы*

1. Даны матрицы  $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ -4 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ . Найти матрицу  $-2A + 3B$ .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Вычислить определитель

4. Вычислить определители: а)  $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ ; б)  $\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$ ; в)  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ .

5. Найти матрицу  $C = AB$ , если: а)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ; б)  $A = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = (1 \ 2)$ .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Найти обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Найти матрицу, обратную для

8. Решить систему уравнений матричным способом:  $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x-3z=0 \\ x-y=2 \end{cases}$   $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

9. Структурная матрица торговли трех стран  $S_1, S_2, S_3$  имеет вид:  $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$ . Найти соотношение национальных доходов стран для сбалансированной торговли.
10. Решить систему линейных уравнений: 
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$
11. Решить системы по формулам Крамера: а) 
$$\begin{cases} 2x - y = 0; \\ x + 3y = 7; \end{cases}$$
 б) 
$$\begin{cases} x - y + z = 0; \\ 2x + y + z = 5; \\ 2y - z = 3. \end{cases}$$

### Тема 3. Введение в анализ: предел и непрерывность

*Вид работы:* изучение литературы по теме, подготовка к практическому занятию, решение, заданных для самостоятельной работы, задач (кейс-задач).

*Рассматриваемые вопросы:*

1. Числовые множества. Операции над множествами.
2. Множество комплексных чисел. Операции с комплексными числами.
3. Дать определение точных граней множества.
4. Дать определение функции как отображения множеств.
5. Изложить способы задания функции.
6. Изложить методику нахождения области определения функции.
7. Изложить основные свойства функции.
8. Сформулировать понятие обратимой функции. Привести примеры.
9. Обосновать утверждение «Монотонная функция не может быть периодичной». Справедливо ли утверждение «Периодичная функция может быть монотонной»?
10. Перечислить простейшие элементарные функции.
11. Построить графики простейших элементарных функций.
12. Что называется сложной функцией?
13. Как называется функция натурального аргумента? Как выглядит график этой функции?
14. Объяснить технологию построения графика функции методом сложения.
15. Какое влияние оказывает на поведение графика функции изменение знака (возведении аргумента в натуральную степень, прибавление к аргументу отрицательного числа) в аналитическом представлении этой функции.
16. Привести основную классификацию функций.
17. Привести примеры функций, заданных неявно и параметрически.
18. Привести примеры графиков функций из экономики (физики), описать их свойства.
19. Дать определение предела числовой последовательности.
20. Дать определение предела функции в бесконечности и в точке.
21. Дать определение одностороннего предела функции в точке.
22. Дать определение бесконечно малой функции.
23. Изложить свойства бесконечно малых функций.
24. Дать определение бесконечно большой функции.
25. Сформулировать теорему о связи бесконечно малых и бесконечно больших функций.
26. Сформулировать основные теоремы о пределах.
27. Изложить признаки существования предела.
28. Изложить теорему о первом замечательном пределе, указать ее следствия.
29. Изложить теорему о втором замечательном пределе, указать ее следствия.
30. Какая функция называется непрерывной в точке, ее свойства.

31. Изложить свойства функций, непрерывных на отрезке.
32. Привести классификацию точек разрыва.
33. Изобразить графически функции, имеющие разрывы различных типов.
34. Возможности применения полученных сведений с экономическим обоснованием решения в различных областях жизнедеятельности и профессиональной деятельности таможенного дела.

*Задачи для самостоятельной работы*

1. Вычислить предел:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 7n^2 + 3n - 4}{3n^3 - 12n}$ .
2. Вычислить предел:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x}$ .
3. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 2} (5x^2 - 13x + 5)$ .
4. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{2x - 1}$ .
5. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$ .
6. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x - 2}$ .
7. Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{x^2}$ .
8. Найти  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x$ .
9. Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{1 + \sin 2x}$ .
10. Найти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 1}{2x + 3}\right)^{1-5x}$ .
11. Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\sin^2 3x}$ .

#### **Тема 4. Дифференциальное исчисление**

*Вид работы:* изучение литературы по теме, подготовка к практическому занятию, решение, заданных для самостоятельной работы, задач (кейс-задач).

*Рассматриваемые вопросы:*

1. Дать определение производной функции одной независимой переменной.
2. Какая функция называется дифференцируемой на промежутке?
3. Изложить геометрический, физический и экономический смысл производной.
4. Может ли функция, непрерывная в точке, быть в этой точке не дифференцируема?
5. Дать определение дифференциала функции одной независимой переменной.
6. Изложить и записать основные правила дифференцирования.
7. Записать таблицу производных основных элементарных функций.
8. Записать правило нахождения дифференциала суммы (произведения, частного).
9. Описать технологию приближенных вычислений с помощью дифференциала.
10. Сформулировать правила дифференцирования сложной и неявной функций.
11. Сформулировать правило дифференцирования функции, заданной параметрически.

12. Описать технологию нахождения производной степенно-показательной функции.
13. Сформулировать правила нахождения производных высшего порядка.
14. Привести примеры функций, не имеющих производную в точке.
15. Что понимают под бесконечной производной?
16. Сформулировать основные теоремы дифференциального исчисления (теоремы о среднем).
17. Сформулировать правило Лопитала. Привести примеры его применения.
18. Записать формулу Тейлора.
19. Привести разложения элементарных функций по формуле Маклорена.
20. Дать определения понятиям возрастания и убывания функции.
21. Сформулировать теоремы об условиях возрастания и убывания функции.
22. Дать определение экстремума функции.
23. Сформулировать необходимые и достаточные условия существования экстремума функции.
24. Объяснить понятие «наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке».
25. Дать определение выпуклости функции.
26. Что называется точкой перегиба функции?
27. Сформулировать условия выпуклости функции, условия существования точек перегиба.
28. Дать определение асимптотам графика функции.
29. Отыскание асимптот графика функции.
30. С помощью понятий приращение, производная, дифференциал дать определение средней скорости вращения, мгновенной скорости вращения, эластичности спроса по цене, предельных издержек производства.
31. Возможности применять знания в сфере экономики и управления, анализировать потенциал и тенденции развития российской и мировой экономик для решения практических и (или) исследовательских задач в профессиональной деятельности в таможенном деле.

*Задачи для самостоятельной работы*

1. Вычислить производную:  $y = x \cdot \log_2^3(\operatorname{tg} 3x)$ .
2. Найти производную функции:  $y = \frac{\sin 3x}{x+1}$ .
3. Вычислить  $y''(0)$ , если  $y = x^2 \cdot e^{x^2}$ .
4. Найти производную функции одной переменной. Используя правила вычисления производных и таблицу производных элементарных функций.
  - 1)  $y = 26\sqrt[3]{x^{32}} - 7\operatorname{tg} 2x$ , 2)  $y = e^{4^x} \arccos 3x$ , 3)  $y = \frac{\operatorname{ctg} 6x}{2x^4}$ .
5. Найти точки перегиба, промежутки выпуклости и вогнутости графика функции  $f(x) = \frac{2x^2}{1+x^2}$ .
6. Найти наибольшее и наименьшее значения функций на заданных отрезках.
7.  $y = \frac{4x}{4+x^2}$ ,  $[-4, 2]$ . Найти частные производные первого порядка функции  $z = x^2 + 2x + y^2 - 3$
8. Показать, что функция  $z = y \cdot \ln(x^2 - y^2)$  удовлетворяет уравнению  $\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$ .



9. Найти экстремумы функции двух переменных  $z = f(x, y)$ .
- а.  $z = 2x^3 + 6xy^2 - 30x - 24y$ .                      б.  $z = x^3 - y^3$ .

### Тема 5. Интегральное исчисление

*Вид работы:* изучение литературы по теме, подготовка к практическому занятию, решение, заданных для самостоятельной работы, задач (кейс-задач).

*Рассматриваемые вопросы:*

1. Дать определение первообразной.
2. Дать определение неопределенного интеграла и записать его выражение.
3. Сформулировать и записать основные свойства неопределенного интеграла.
4. Какие методы применяются при нахождении неопределенных интегралов?
5. Объяснить основные методы интегрирования, привести примеры.
6. Объяснить метод интегрирования по частям, записать формулу, привести пример.
7. Объяснить метод подстановки, привести пример.
8. Дать определение правильной и неправильной рациональных дробей, привести примеры.
9. На какие составляющие преобразуется неправильная рациональная дробь? Привести пример.
10. Записать четыре вида простейших дробей рациональных функций.
11. Изложить алгоритм интегрирования рациональных функций.
12. Объяснить содержание способа вычисления неопределенных коэффициентов.
13. Выполнить интегрирование простейшей дроби первого (второго, третьего) вида.
14. Изложить способы интегрирования тригонометрических функций.
15. Изложить способы интегрирования рассмотренных иррациональных функций.
16. Что называется определенным интегралом и как он обозначается?
17. Каков геометрический смысл определенного интеграла?
18. Сформулировать основные свойства определенного интеграла.
19. Написать и прочитать формулу Ньютона-Лейбница.
20. Изложить основные способы вычисления определенных интегралов.
21. Написать формулы для вычисления площади плоской криволинейной трапеции
22. Написать формулу для вычисления длины дуги плоской кривой.
23. Написать формулу для вычисления объема тела вращения.
24. Написать формулу для вычисления площади поверхности вращения.
25. Какие определенные интегралы называются несобственными?
26. Дать определение несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования.
27. Дать определение несобственного интеграла от функции с бесконечными разрывами в области интегрирования.
28. Изложить методику вычисления несобственных интегралов.
29. Какие несобственные интегралы называются сходящимися и какие расходящимися?
30. Возможности применять знания в сфере экономики и управления, анализировать потенциал и тенденции развития российской и мировой экономик для решения практических и (или) исследовательских задач в профессиональной деятельности в таможенном деле.

*Задачи для самостоятельной работы*

1. Найти неопределенный интеграл  $\int \frac{3x+1}{x(x-1)} dx$ .

2. Найти неопределённые интегралы  $\int \frac{dx}{\sin x + 2}$ ,  $\int \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[4]{x^3} \right) dx$ ,  $\int \cos 5x dx$ ,  
 $\int \frac{dx}{x+1}$ ,  $\int \operatorname{ctg} x dx$ ,  $\int e^x \sin e^x dx$ ,  $\int e^{x^2} x dx$ ,  $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ ,  $\int \sqrt{x+1} dx$ ,  
 $\int \operatorname{ctg} x dx$ ,  $\int \ln^2 x \frac{dx}{x}$ ,  $\int \frac{x dx}{1+x^4}$ ,  $\int (x^2+1) \sin 3x dx$ ,  $\int (2x+3) \ln 5x dx$ ,  $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$ ,  
 $\int \frac{(x+3) dx}{x^2+4x+13}$ ,  $\int \frac{(x+1) dx}{(x^2+1)^2}$ .

3. Вычислить интегралы  $\int \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 - x - 2} dx$ ,  $\int \frac{3x + 1}{(x+1)(x^2 + 6x + 13)} dx$ .

4. Вычислить интегралы  $\int \frac{dx}{\sin x + 1}$ ,  $\int \frac{\sin x dx}{2 + \cos x}$ ,  $\int \frac{dx}{2 - \sin^2 x}$ ,  $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^3 x}$ ,  
 $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$ ,  $\int \sin 5x \cdot \sin 3x dx$ ,  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x} + 1}$ ,  $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 13}}$ ,  
 $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2 + 2x - 1}}$ ,  $\int \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3} dx}{x + 1}$ .

5. Найти неопределённые интегралы. Правильность полученных результатов проверить дифференцированием

$$1) \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{5}}; \quad 2) \int \frac{(x+4) dx}{x^2 - 2x - 8}; \quad 3) \int x \ln(1-3x) dx.$$

6. Найти определенный интеграл в границах интегрирования  $[1, 2]$ :  $\int \frac{2x+7}{x^2+7x+1} dx$ .

7. Найти определённый интеграл в границах интегрирования  $[1, 2]$ :  $\int \frac{x^{\frac{1}{5}} dx}{x^4 - x^6}$ .

8. Вычислить определенные интегралы  $\int_0^2 x^2 dx$ ,  $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$ ,  $\int_2^5 \frac{dx}{2x+3}$ ,  $\int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{1+\sqrt{x}}$ ,  
 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x dx$ ,  $\int_0^1 x \cdot \operatorname{arctg} x dx$

9. Вычислить определенный интеграл  $\int_0^4 \frac{\sqrt{x} dx}{4+x}$ .

10. Исследовать сходимость несобственного интеграла  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2}$ .

11. Вычислить интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ ,  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ .

12. Исследовать на сходимость интеграл  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(e^x+1)}$ .

13. Исследовать на сходимость интеграл  $\int_1^{\infty} \frac{(x+1) dx}{\sqrt{x^3}}$ .
14. Вычислить интеграл  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ .
15. Исследовать на сходимость интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+\ln x)}$ .
16. Исследовать на сходимость интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^5}} dx$ .
17. Исследовать на сходимость интеграл  $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ .
18. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$  и  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ .

### Тема 6. Обыкновенные дифференциальные уравнения

*Вид работы:* изучение литературы по теме, подготовка к практическому занятию, решение, заданных для самостоятельной работы, задач (кейс-задач).

*Рассматриваемые вопросы:*

1. Дать определение дифференциального уравнения (ДУ) первого порядка.
2. Привести примеры ДУ в различных областях науки.
3. Как проверить решение дифференциального уравнения?
4. Что называется общим решением ДУ?
5. Изложить методику решения задачи Коши.
6. Записать основные виды ДУ с разделенными и разделяющимися переменными, изложить методику их решения.
7. Дать определение общим и частным решениям ДУ первого порядка.
8. Дать определение и изложить методику решения однородного ДУ первого порядка
9. Дать определение и изложить методику решения линейных ДУ первого порядка (подстановка Бернулли и метод Лагранжа).
10. Дать определение и изложить методику решения уравнения Бернулли.
11. Дать определение и изложить методику решения уравнений в полных дифференциалах.
12. Привести примеры ДУ неразрешенных относительно производной.
13. Изложить основные понятия и определения ДУ высших порядков.
14. Изложить методику интегрирования ДУ, допускающих понижение порядка.
15. Дать определение линейного ДУ с переменными коэффициентами.
16. Записать однородное и неоднородное ДУ второго порядка с переменными коэффициентами, их общие и частные решения, дать пояснения.
17. Записать линейное однородное ДУ высшего порядка с постоянными коэффициентами.
18. Изложить методику получения характеристического уравнения и его корней.
19. Записать вид частных и общих решений линейного однородного ДУ для различных корней характеристического уравнения.
20. Дать определение линейному неоднородному ДУ высшего порядка с постоянными коэффициентами, записать это уравнение.

21. Сформулировать теорему об общем решении неоднородного линейного ДУ, записать общее решение такого уравнения.
22. Какими двумя методами может быть определено частное решение неоднородного линейного ДУ с постоянными коэффициентами?
23. Что называется системой ДУ?
24. Возможности применения полученных сведений с экономическим обоснованием решения в различных областях жизнедеятельности и профессиональной деятельности таможенного дела.

*Задачи для самостоятельной работы*

1. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка  $y' = x^2 \sqrt[3]{y}$ ,  
 $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$ ,  $xy' + 3y = x^2$ .
2. Проинтегрировать уравнение  $\sin x \cdot dy - y \cdot \ln y \cdot dx = 0$ ,  $y > 0$ .
3. Проинтегрировать уравнение:  $y' + xy = x^3 y^2$ .
4. Найти общее решение уравнения:  $y'' + y' - 2y = 0$ .
5. Найти общее решение уравнения:  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .
6. Найти общее решение уравнения  $y'' + 9y' = 0$ .
7. Найти общее решение уравнения:  $y'' - 4y' + 4y = 0$ .
8. Решить дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами второго порядка методом Бернулли (введением двух функций)  
 $y'' + 2y' + y = e^{-x} \sqrt{x+1}$ ,  $y'' + y = \operatorname{tg} x$
9. Найти общее решение уравнения:  $y'' + 9y = (x^2 + 1)e^{3x}$ .
10. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения  $y'' + 2y' + 5y = 2 \cos x$ .
11. Проинтегрировать дифференциальное уравнение  $y'' = 6x + \sin x$
12. Найти частное решение дифференциального уравнения  $y' = \frac{2}{y^2}$ , удовлетворяющее условиям:  $y = 1$ ,  $y' = 2$  при  $x = 1$ .
13. Найти общее решение дифференциального уравнения, или решение с заданными начальными условиями  $y''' \sin^4 x = \sin 2x$ ,  $y'' + y''' = x$ ,  $y''' = \sqrt{1 + y''}$ .
14. Эластичность объема валовой продукции  $y$  от объема капитальных вложений  $x$  выражается формулой:  $E_x(y) = \frac{\sqrt{x}}{4} + 1$ ,  $x > 0$ . Определить зависимость объема валовой продукции  $y$  от объема капитальных вложений  $x$ , если при  $x = 9$ ,  $y = e^{\frac{3}{2}}$ .
15. Предположим, что размер предложения сельскохозяйственного продукта в  $t$ -ом году есть функция цены в  $(t-1)$  году:  $s = 2(t-1) + 5p - 4 \frac{dp}{dt}$ , а спрос на этот продукт

является функцией цены в данном  $t$ -ом году:  $q = t + 3p + \frac{dp}{dt}$ . Определить цену равновесия, т. е. когда спрос равен предложению:  $s = q$ .

16. Предположим, что динамическая функция предложения товара описывается

$$F\left(x, p, \frac{dp}{dt}\right) = \frac{x_t}{p_t - \sqrt{x_t p_t}} \cdot \frac{dp_t}{dt},$$

зависимостью: где  $x_t$  - запас товара,  $\frac{dp}{dt}$  — тенденция формирования цены,  $p_t$  - цена товара в данный момент времени  $t$ . Требуется определить зависимость цены от количества товара, если динамическая функция предложения товара будет равна скорости увеличения запаса товара.

17. Решить систему 
$$\begin{cases} y_1' = 3y_1, \\ y_2' = y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

18. Найти общее решение системы: 
$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + y_2. \end{cases}$$
 и решить задачу Коши  $(0; 1; 0)$ .

### Тема 7. Ряды

*Вид работы:* изучение литературы по теме, подготовка к практическому занятию, решение, заданных для самостоятельной работы, задач (кейс-задач).

*Рассматриваемые вопросы:*

1. Дать определение числового ряда.
2. Что понимается под суммой числового ряда?
3. При каких условиях числовые ряды сходятся и расходятся?
4. Сформулировать основные свойства сходящихся числовых рядов.
5. Сформулировать рассмотренные признаки сходимости числовых рядов.
6. Дать определение знакопеременного числового ряда.
7. Сформулировать признак сходимости Лейбница.
8. При каких условиях числовой ряд является сходящимся абсолютно и сходящимся условно?
9. Сформулировать и записать признак Даламбера для знакопеременных (знакопеременных) числовых рядов.
10. Дать определение степенного ряда.
11. Что понимается под сходимостью степенных рядов в точке, интервале, области?
12. Дать определение и записать формулы радиуса, интервала и области сходимости степенного ряда.
13. Какой степенной ряд называется обобщенным?
14. Записать выражения для рядов Тейлора и Маклорена.
15. Привести формулы для разложения элементарных функций в ряд Маклорена.
16. Сформулировать задачу вычисления значений функции посредством степенных рядов. Привести примеры. Изложить порядок оценки точности полученного результата
17. Написать ряд Фурье для функции, заданной на отрезке с периодом.
18. Написать формулы для определения коэффициентов этого ряда.
19. Возможности применения полученных сведений с экономическим обоснованием решения в различных областях жизнедеятельности и профессиональной деятельности таможенного дела.

*Задачи для самостоятельной работы*

1. Найти в простейшей форме общий член ряда:  
 а)  $\frac{2}{5} + \frac{4}{9} + \frac{6}{13} + \dots$ ; б)  $\frac{3}{5} - \frac{8}{10} + \frac{15}{17} - \frac{24}{26} + \dots$ .

2. Найти формулу для общего члена ряда  $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots$ , считая, что каждый его последующий член определяется по тому же закону, по которому образованы записанные члены, и найти его сумму.

3. Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+3}{5n-7}$ .

4. Исследовать сходимость ряда  $1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \dots + \frac{1}{n \cdot 3^{n-1}} + \dots$ .

5. Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{n^3}$ .

6. Исследовать сходимость рядов:  
 а)  $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ .

7. Исследовать ряд на сходимость:  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n-1}{3n-2} \right)^{4n+5} = \left( \frac{1}{1} \right)^9 + \left( \frac{3}{4} \right)^{13} + \dots$

8. Исследовать ряд на сходимость:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+2n-1}{2n^5-n^4+3n^2} = 1 + \frac{15}{92} + \dots$

9. Исследовать сходимость ряда  $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \dots$ .

10. Исследовать сходимость ряда:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg n}{\ln n+2}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$ ;

г)  $\frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \dots$ ; д)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ .

11. Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{10+7^{2n}}$ .

12. Исследовать сходимость рядов:  
 а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^7}{7n^6+3}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{2n-1}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \frac{\pi n}{3}}{n^2+1}$ .

13. Исследовать сходимость ряда  $\frac{2}{3} - \frac{3}{7} + \frac{4}{11} - \frac{5}{15} + \frac{6}{19} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{n+1}{4n-1} + \dots$

14. Исследовать ряды на абсолютную (условную) сходимость:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n+2}}{(2n)!} = -\frac{27}{2} + \frac{83}{24} - \frac{243}{720} + \dots$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n-2}{4n^2-n-1} = \frac{1}{2} - \frac{4}{13} + \frac{7}{32} - \dots$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n^2-2}{4n^2-n+1} = -\frac{1}{4} + \frac{10}{15} - \frac{25}{34} + \dots$

15. Исследовать сходимость знакопеременного ряда

$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{3^7} + \dots + \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{3^n} + \dots$

16. Исследовать сходимость ряда:  $1 - \frac{3}{4} + \frac{5}{8} - \frac{9}{16} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{2^{n-1}}{2^n} + \dots$

17. Найти область сходимости ряда:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{3^{n-1} \cdot (2n^2+1)} \cdot (x+1)^n$

## Тема 8. Теория вероятностей

*Вид работы:* изучение литературы по теме, подготовка к практическому занятию, решение, заданных для самостоятельной работы, задач (кейс-задач).

*Рассматриваемые вопросы:*

1. Перечислить основные формулы комбинаторики.
2. Изложить методику решения комбинаторных задач.
3. Дать определение случайного события.
4. Дать основные определения, связанные с понятием «случайное событие» (достоверные и невозможные события, совместные и несовместные...)
5. Дать классическое и статистическое определения вероятности случайного события.
6. Дать геометрическое определение вероятности случайного события.
7. Рассмотреть основные понятия и формулы непосредственного подсчета вероятности случайного события.
8. Сформулировать теоремы сложения вероятностей, записать формулы.
9. Сформулировать теоремы умножения вероятностей, записать формулы.
10. Сформулировать и записать формулу теоремы о полной вероятности.
11. Сформулировать и записать формулу Байеса (теорему гипотез).
12. Какие испытания называются повторными независимыми?
13. Записать формулу Бернулли и объяснить ее вероятностный смысл.
14. Записать и объяснить формулу Муавра-Лапласа, интегральную формулу Лапласа.
15. Записать и объяснить формулу функции Лапласа.
16. Дать определения дискретной и непрерывной случайной величины.
17. Сформулировать законы распределения дискретной случайной величины.
18. Сформулировать законы распределения непрерывной случайной величины.
19. Записать формулы числовых характеристик дискретных случайных величин.
20. Записать формулы числовых характеристик непрерывных случайных величин.
21. Дать определения и записать формулы начальных и центральных моментов  $k$ -го порядка случайной величины.
22. Сформулировать и записать формулы основных законов дискретной случайной величины.
23. Сформулировать и записать формулы основных законов непрерывной случайной величины.
24. Записать и объяснить основные формулы нормального закона распределения случайной величины.
25. Записать формулу для вероятности попадания случайной величины, распределенной по нормальному закону, на заданный интервал.
26. Сформулировать правило трех сигм.
27. Изложить основные понятия системы двух случайных величин (законы распределения, числовые характеристики).
28. Изложить основные понятия нормального закона распределения случайной величины на плоскости.
29. Возможности применять знания в сфере экономики и управления, анализировать потенциал и тенденции развития российской и мировой экономик для решения практических и (или) исследовательских задач в профессиональной деятельности в таможенном деле.

*Задачи для самостоятельной работы*

1. В барабане револьвера шесть гнезд, из которых в четыре вложены патроны, а два пустые. Барабан приводится в движение, в результате чего против ствола

оказывается одно из гнезд. После этого нажимают спусковой крючок. Если гнездо пустое, то выстрела не происходит. Найти вероятность того, что в результате двух опытов: а) выстрела не произойдет; б) произойдет два выстрела; в) произойдет хотя бы один выстрел.

2. В лифт девятиэтажного дома вошли три человека. Предположим, что каждый из них с равной вероятностью может выйти на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут на одном этаже; что все пассажиры выйдут на разных этажах.
3. Вероятность хотя бы одного попадания при двух выстрелах равна 0,84. Найти: а) наименее вероятное число попаданий в серии из семи выстрелов и модальную вероятность; б) что вероятнее: три попадания при четырех выстрелах или шесть попаданий при восьми?
4. 189. Стрелок  $A$  поражает мишень с вероятностью 0,6, стрелок  $B$  – с вероятностью 0,5 и стрелок  $C$  – с вероятностью 0,4. Стрелки дали залп по мишени и две пули попали в цель. Что вероятнее: попал стрелок  $C$  в мишень или нет?
5. В ящике десять стандартных деталей и пять бракованных. Наугад извлекаются три детали. Каковы вероятности того, что среди них: а) одна бракованная; б) две бракованных; в) хотя бы одна стандартная?
6. Имеются две партии однородных деталей. Первая партия состоит из 12 деталей, из которых три бракованных. Вторая партия состоит из 15 деталей, из которых четыре бракованных. Из первой и из второй партии извлекают по две детали. Какова вероятность того, что среди них нет бракованных деталей?
7. В ящике 100 деталей. Из них 20 деталей изготовлены первым заводом, 80 – вторым. Первый завод производит 90% хороших деталей, второй – 80%. Найти вероятность того, что две извлеченные наудачу детали окажутся хорошими.
8. Из урны, содержащей три белых и два черных шара, переложены два вынутых наудачу шара в урну, содержащую четыре белых и четыре черных шара. Найти вероятность вынуть из второй урны белый шар.
9. В коробке лежат девять теннисных мячей, из которых шесть новых. Для первой игры взяли два мяча, которые после игры возвратили. Для второй игры также взяли два мяча, оказавшиеся новыми. Какова вероятность того, что для первой игры брали два старых мяча?
10. Для изделий некоторого производства вероятность удовлетворять стандарту равна 0,96. Предлагается упрощенная система испытаний, дающая положительный результат с вероятностью 0,98 для изделий, удовлетворяющих стандарту, а для изделий, которые не удовлетворяют стандарту, с вероятностью 0,05. Какова вероятность того, что изделие, выдержавшее испытание, удовлетворяет стандарту?
11. Задана непрерывная случайная величина  $X$  своей плотностью распределения вероятностей  $f(x)$ . Требуется: определить коэффициент  $A$ ; найти функцию распределения  $F(x)$ ; схематично построить графики функций  $f(x)$  и  $F(x)$ ; вычислить математическое ожидание и дисперсию  $X$ ; определить вероятность того, что  $X$  примет значение из интервала  $(a, b)$ .
12. Из 16 лотерейных билетов выигрышными являются 5. Какова вероятность того, что среди 10 взятых наудачу билетов два будут с выигрышем?
13. В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди них 3 женщины.
14. Студент разыскивает нужную формулу в трех справочниках. Вероятность того, что эта формула содержится в первом справочнике, равна 0,8, во втором – 0,7, в третьем – 0,6. Найти вероятность того, что эта формула есть хотя бы в двух из них.



15. Трое стрелков стреляют по одной мишени. Вероятность поражения цели первым из них равна 0,8, вторым – 0,7, третьим – 0,9. Найти вероятность поражения цели двумя выстрелами при одном залпе.
16. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры, и помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.
17. Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет: а) менее 2 раз; б) не менее 2 раз.
18. Найти вероятность того, что событие А произойдет не менее 2 раз в 4 независимых испытаниях, если вероятность наступления события А в одном испытании равна 0,6.
19. На сборку поступают детали с трех автоматов. Первый дает в среднем 98% годных деталей, второй – 99%, а третий – 97%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если она выбрана случайным образом, а производительность автоматов одинакова.
20. В двух ящиках имеются радиолампы, в первом из них 15 стандартных и 2 с браком. Во втором 10 стандартных и одна с браком. Из первого ящика взята наугад одна лампа и переложена во второй. После чего из второго ящика взята наугад лампа. Найти вероятность того, что эта лампа стандартная.

### **Тема 9. Математическая статистика**

*Вид работы:* изучение литературы по теме, подготовка к практическому занятию, решение, заданных для самостоятельной работы, задач (кейс-задач).

*Рассматриваемые вопросы:*

1. Изложить основные задачи математической статистики.
2. Изложить основные определения (генеральная и выборочная совокупности, вариационный ряд, статистическое распределение выборки, полигон и гистограмма).
3. Что называется выборочной средней и выборочной дисперсией случайной величины?
4. Что называется доверительной вероятностью и доверительным интервалом?
5. Дать определение статистической гипотезе.
6. Изложить методику применения критерия Пирсона для проверки гипотезы о нормальном распределении случайной величины.
7. Дать определение и сформулировать свойства коэффициента корреляции.
8. Дать определение выборочного коэффициента корреляции.
9. Записать уравнения прямых регрессии.
10. Записать уравнения выборочных прямых регрессии.
11. Дать определение корреляционного отношения. Объяснить его вероятностный смысл.
12. Возможности применения знания в сфере экономики и управления, анализировать потенциал и тенденции развития российской и мировой экономик для решения практических и (или) исследовательских задач в профессиональной деятельности в таможенном деле.

*Задачи для самостоятельной работы*

1. Составить закон распределения случайной величины  $X$  дискретного типа. Найти: Функцию распределения  $F(x)$  и построить её график; Математическое ожидание; Дисперсию, среднее квадратическое отклонение; Моду; Начальный и центральный моменты третьего порядка.  
 $X$  – число отказов работы двух станков в течение смены, если один из них выходит из строя чаще, чем другой.

2. Заданы математическое ожидание  $m$  и среднее квадратическое отклонение  $\sigma$  нормально распределенной случайной величины  $x$ .
3. Найти: 1) вероятность того, что  $x$  примет значение, принадлежащее интервалу  $(\alpha; \beta)$ ; 2) вероятность того, что абсолютная величина отклонения  $|x - m|$  окажется меньше  $\delta$ .  
 $m = 15, \sigma = 2, \alpha = 16, \beta = 25, \delta = 4$ .
4. Размер диаметра детали задан полем допуска 20-25 мм. В некоторой партии деталей средний размер их диаметра оказался равным 23,2 мм, а среднее квадратическое отклонение 1 мм. Считая, что размер диаметра детали подчиняется закону нормального распределения, вычислить вероятность брака.
5. Диаметр подшипников, выпускаемых заводом, представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону с математическим ожиданием 16 мм и дисперсией 0,16. Найти вероятность брака при условии, что для диаметра подшипника разрешается допуск  $\pm 0,7$  мм.
6. Дисперсия каждой из данных независимых случайных величин не превышает 5. Найти число  $n$  таких величин, при котором вероятность отклонения средней арифметической случайных величин от средней арифметической их математических ожиданий не более, чем на 0,4, превышает 0,85.
7. Имеется 3200 независимых случайных величин, дисперсии которых ограничены. Какой должна быть верхняя граница этих дисперсий, чтобы отклонение средней арифметической данных случайных величин от средней арифметической их математических ожиданий не превышало по абсолютной величине 0,25 с вероятностью, большей 0,96.
8. Проверкой ОТК установлено. Что при штамповке пластинок брак составляет 2%. Оценить вероятность того, что при проверке партии в 2000 пластинок обнаружится отклонение от установленного процента брака меньше, чем на 0,5%.
9. Размер диаметра детали задан полем допуска 20-25 мм. В некоторой партии деталей средний размер их диаметра оказался равным 23,2 мм, а среднее квадратическое отклонение 1 мм. Считая, что размер диаметра детали подчиняется закону нормального распределения, вычислить вероятность брака.
10. Размер гайки задан полем допуска 60-65 мм. В некоторой партии гаек средний размер оказался равным 62,8 мм, а среднее квадратическое отклонение – 1,1 мм. Считая, что размер гайки подчиняется закону нормального распределения, вычислить вероятность брака по размеру гайки.
11. Диаметр подшипников, выпускаемых заводом, представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону с математическим ожиданием 16 мм и дисперсией 0,16. Найти вероятность брака при условии, что для диаметра подшипника разрешается допуск  $\pm 0,7$  мм.
12. Цех выпускает детали двух типов. Распределение их длины – нормальное. Для деталей 1 типа – математическое ожидание равно 40 мм, а дисперсия – 0,25. Для типа 2 – математическое ожидание 25 мм, дисперсия – 4. Что вероятнее: попадание размера детали типа 1 в интервал ]38; 43[ или детали типа 2 – в интервал ]24; 27[?
13. Диаметр деталей, изготовленных автоматом, представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону. Дисперсия ее равна 4, а математическое ожидание – 20,5 мм. Найти вероятность брака, если допустимые размеры диаметра детали должны быть  $20 \pm 3$  мм.

14. На автомате изготавливают заклепки, диаметр головок которых распределяются по нормальному закону с математическим ожиданием 3 мм и дисперсией 0,01. Какую точность диаметра головок заклепок можно гарантировать с вероятностью 0,9216?
15. Детали, изготовленные автоматом, по размеру диаметра распределяются по нормальному закону. Известно, что математическое ожидание равно 4,5 см, а дисперсия – 0,09. Определить границы, в которых следует ожидать размер диаметра детали, если вероятность невыхода за эти границы равна 0,95.
16. Длина изготавливаемой детали представляет нормально распределенную случайную величину  $X$ . Математическое ожидание ее равно 8 см, а среднее квадратическое отклонение равно 0,1 см. Определить вероятность того, что длина наудачу взятой детали отличается от математического ожидания не более, чем на 0,2 см.
17. Станок-автомат производит валики. Пригодность валика определяется величиной его диаметра  $X$ . Определить вероятность того, что взятый наугад валик окажется годным, если известно, что среднее значение, на которое настроен станок, равно 25 мм, среднее квадратическое отклонение составляет 0,4 мм, а допустимая величина отклонения размера диаметра валика от среднего равна  $\pm 0,6$  мм.
18. Ведется стрельба из орудия по заданному направлению. Дальность полета снаряда распределена по нормальному закону, математическое ожидание равно 3 км, среднее квадратическое отклонение 0,5 км. Найти вероятность того, что выпущенный из орудия снаряд попадет в интервал от 2 до 5 км.

### **6.3. Методические рекомендации по самостоятельной работе обучающихся и подготовке к промежуточной аттестации**

Методические рекомендации по самостоятельной работе составлены с целью оптимизации процесса освоения обучающимися учебного материала.

Самостоятельная работа обучающегося направлена на углубленное изучение разделов и тем рабочей программы и предполагает изучение литературных источников, выполнение домашних заданий и контрольных работ, проведение исследований разного характера. Работа основывается на анализе материалов, публикуемых в интернете, а также реальных фактов, личных наблюдений.

Самостоятельная работа обучающегося над усвоением материала по дисциплине может выполняться в читальном зале РМАТ, специально отведенных для самостоятельной работы помещениях, посредством использования электронной библиотеки и ЭИОС РМАТ.

Содержание и количество самостоятельной работы обучающегося определяется учебным планом, методическими материалами и указаниями преподавателя.

Также самостоятельная работа включает подготовку и анализ материалов по темам пропущенных занятий.

Самостоятельная работа во внеаудиторное время включает:

- работу с лекционным материалом, предусматривающую проработку конспекта лекций;
- изучение учебной и научной литературы;
- поиск (подбор) и обзор литературы, электронных источников информации по индивидуально заданной проблеме курса, написание доклада, исследовательской работы по заданной проблеме;

- выполнение задания по пропущенной или плохо усвоенной теме;
- подготовку к практическим занятиям;
- подготовка к промежуточной аттестации.

В зависимости от выбранных видов самостоятельной работы студенты самостоятельно планируют время на их выполнение. Предлагается равномерно распределить изучение тем учебной дисциплины.

## 7. Фонд оценочных средств

Фонд оценочных средств по дисциплине разработан в соответствии с Методическими рекомендациями и является составной частью ОПОП.

## 8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

### Основная:

1. Краткий курс высшей математики: учебник / К.В. Балдин, Ф.К. Балдин, В.И. Джеффаль и др.; под общ. ред. К.В. Балдина. – 4-е изд., стер. – Москва: Дашков и К°, 2020. <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=573171>
2. Хамидуллин, Р.Я. Математика: базовый курс / Р.Я. Хамидуллин, Б.Ш. Гулиян. – 5-е изд., перераб. и доп. – Москва: Университет Синергия, 2019. <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=571501>
3. Крахин, А.В. Математика для юристов: уч. пособие / А.В. Крахин. – 2-е изд., испр. – Москва: ФЛИНТА, 2020. <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=611367>

### Дополнительная:

1. Математика: уч.-метод. пособие / сост. В.Ю. Сафонова, В.Г. Борисов. – Кемерово: КГУ, 2019. <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=600279>
- Математика: уч. пособие / С.Н. Веричев, А.В. Горбыш, О.Е. Рощенко, Е.А. Лебедева. – Новосибирск: НГТУ, 2019. <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=575491>

## 9. Обновляемые современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы

### 9.1. Обновляемые современные профессиональные базы данных

1. <https://www.economy.gov.ru/material/departments/d08/> - официальный сайт Министерство экономического развития Российской Федерации
2. <http://www.rostourunion.ru/> - официальный сайт Российского союза туристической- отраслевого объединения, в которое входят туроператоры, турагентства, гостиницы, санаторно-курортные учреждения, транспортные, страховые, консалтинговые, IT-компании, учебные заведения, СМИ, общественные и иные организации в сфере туризма;
3. <https://customs.gov.ru/eac> - официальный сайт Федеральной таможенной службы;
4. <http://www.eaeunion.org/> - официальный сайт Евразийского таможенного союза;
5. <https://sh.customs.gov.ru/> - официальный сайт Шереметьевской таможни;
6. Science Alert является академическим издателем журналов открытого доступа. Также издает академические книги и журналы. Science Alert в настоящее время имеет более 150 журналов открытого доступа в области бизнеса, экономики, информатики, коммуникации, инженерии, медицины, математики, химии, общественной и гуманитарной науки;

7. Science Publishing Group электронная база данных открытого доступа включающая в себя более 500 научных журналов, около 50 книг, 30 материалов научных конференций в области статистики, экономики, менеджмента, педагогики, социальных наук, психологии, биологии, химии, медицины, пищевой инженерии, физики, математики, электроники, информатики, науке о защите природы, архитектуре, инженерии, транспорта, технологии, творчества, языка и литературы.

## **9.2. Обновляемые информационные справочные системы**

1. Информационно-правовая система «Гарант». – URL: <http://www.garant.ru/>;
2. Информационно-правовая система «Консультант плюс». – URL: <http://www.consultant.ru/>.

## **10. Обновляемый комплект лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства**

1. Microsoft Office. Интегрированный пакет прикладных программ;
2. Microsoft Windows;
3. Корпоративная информационная система «КИС».
4. Антиплагиат ВУЗ. Система обнаружения текстовых заимствований.
5. Kaspersky Endpoint Security

## **11. Электронные образовательные ресурсы**

1. ЭБС «Университетская библиотека Онлайн»
2. Корпоративная информационная система «КИС»

## **12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Изучение дисциплины обеспечивается в соответствии требованиями Федерального государственного образовательного стандарта по специальности 38.05.02 Таможенное дело к материально-техническому обеспечению. Материально-техническое обеспечение необходимое для реализации дисциплины включает: учебная аудитория (кабинет математики и информатики) для проведения занятий всех видов, предусмотренных образовательной программой, в том числе групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации: оборудование: посадочные места по количеству обучающихся; рабочее место преподавателя; шкаф, учебная доска, стенд, металлический стеллаж для оборудования; технические средства обучения: Локальная сеть. Персональные компьютеры с выходом в сеть Интернет – 11 шт., проектор, экран.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены персональными компьютерами (12 шт.) с возможностью подключения к информационно-телекоммуникационной сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду, к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам, комплектом мебели.

РМАТ обеспечена необходимым комплектом лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства (состав определен в п.10 и подлежит обновлению при необходимости).

При использовании в образовательном процессе печатных изданий библиотечный фонд укомплектован печатными изданиями из расчета не менее 0,25 экземпляра каждого из изданий, указанных в п.8, на одного обучающегося из числа лиц, одновременно осваивающих

соответствующую дисциплину (модуль), проходящих соответствующую практику.

Обучающимся обеспечен доступ (удаленный доступ), в том числе в случае применения электронного обучения, дистанционных образовательных технологий, к современным профессиональным базам данных и информационным справочным системам, состав которых определяется в п.9 и подлежит обновлению (при необходимости).

**Дополнения и изменения в рабочей программе дисциплины  
«Математика»**

**на 20\_\_/20\_\_ учебный год**

Следующие записи относятся к п.п.
Автор
Зав. кафедрой